This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

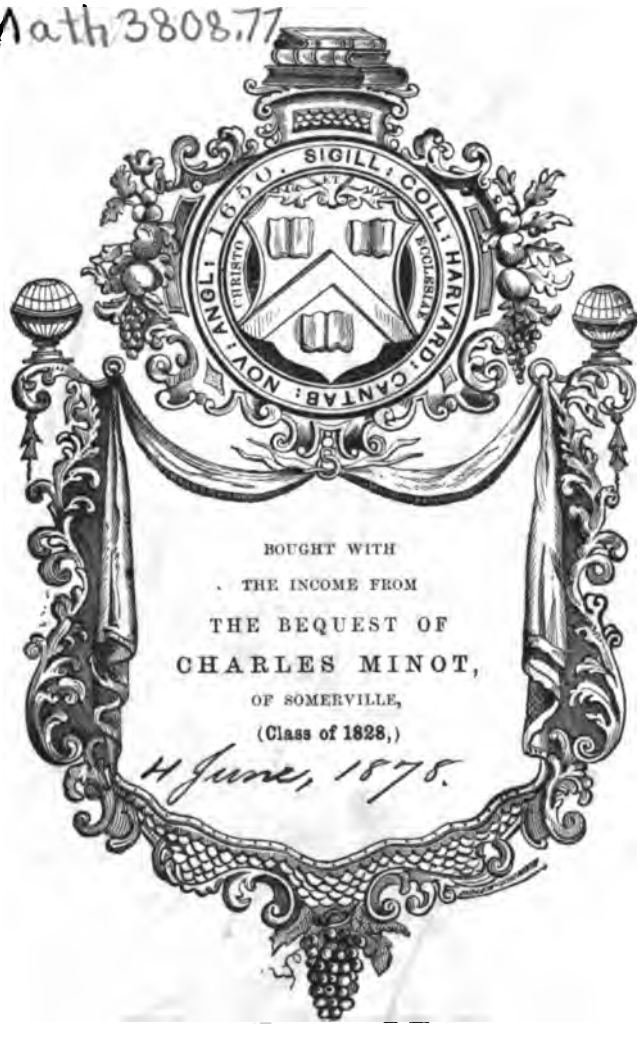
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Math 3808.77



SCIENCE CENTER LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Ueber

eine specielle Klasse Abelscher Functionen

von

Dr. Johannes J. Thomae,
Professor zu Freiburg i. B.

Halle a/S.
Verlag von L. Nebert.
1877.

Digitized by Google

~~27~~

Math 3808.77

1878, June 4.
Minot Fund.

Das Recht der Uebersetzung in fremde Sprachen bleibt vorbehalten.

Digitized by Google

Vorwort.

Die Schwierigkeiten, welche in der Theorie der allgemeinen Abelschen Functionen der Lösung des Umkehrproblems entgegenstehen, sind algebraische. Sie vermindern sich, wenn die Functionen, die in $p-1$ Puncten unendlich klein und in ebensoviel Puncten unendlich gross zweiter Ordnung werden, die Abelschen Functionen im engeren Sinne, gerade in den Verzweigungspuncten verschwinden und unendlich werden, also bei den ultraelliptischen Functionen. Eine ähnliche Vereinfachung findet auch noch dann statt, wenn die zu Grunde liegende Riemannsche Fläche zwar mehr als zweiblättrig ist, wenn aber die Windungspuncte immer $m-1$ fache sind, für den Fall, dass m Blätter vorhanden sind. Für den Fall $m=3$ ist in der vorliegenden Schrift das Umkehrproblem gelöst, und sind auch die Integrale zweiter Gattung mittelst ϑ-Functionen vollständig dargestellt. Dabei bewirkt die Beschränkung, die der Verfasser der Lage der Verzweigungspuncte auferlegt hat, dass p immer gerade ist. Diese Beschränkung wurde gemacht, um Uebersichtlichkeit und Eleganz der Formeln zu erhalten. Der allgemeine Fall kann als Grenzfall des hier behandelten angesehen werden, wenn Windungspuncte derselben Gruppe (der k oder der t) zusammenfallen.

Freiburg, im April 1877.

J. Thomae.

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniss.

I.

Seite

Einleitung. Die zu Grunde liegende Irrationalität. Abgekürzte Bezeichnung der Determinanten 1

§ 1. Form einwerthiger Functionen von s und z. $sss = \Pi(z-k):(z-\mathfrak{k})$ 2

§ 2. Darstellung einwerthiger Functionen die $p+1$ mal unendlich werden 2

§ 3. Darstellung des Falles, in welchem zwei der Puncte Unendlich zu einem und denselben z und verschiedenen Werthen von s gehören. 3

§ 4. Darstellung einwerthiger Functionen, die in $n+1$ Paaren von Puncten unendlich gross werden, wenn jedes Paar nur ein z aber verschiedene s enthält 4

§ 5. Der Fall, in welchem drei Puncte zu einem z gehören 4

§ 6. Der Fall, in welchem Puncte Unendlich auf Verzweigungspuncte $(k, \mathfrak{k})$ fallen 4

§ 7. Der Fall, in welchem doppelte Puncte Unendlich auf Verzweigungspuncte fallen 4

§ 8. Die Function Φ, die in p Puncten und einem Verzweigungspuncte unendlich gross wird, und in einem andern Verzweigungspuncte verschwindet 4

§ 9. Eine Function, die in einigen willkürlichen Puncten und in mehreren Verzweigungspuncten unendlich wird 5

§ 10. Eine Function S, die in allen Verzweigungspuncten und einem willkürlichen Puncte unendlich wird . . . 5

§ 11. Grenzwerthe dieser Function 6

§ 12 und 12a. Die Function Ψ 6

§ 13. Die Function $\varphi = sF(z)+\mathfrak{F}(z)$. Durch die Gleichung $\varphi = 0$ verknüpfte Puncte 7

§ 14—18. Eigenschaften von Functionen φ, die in speciellen Puncten verschwinden . . . . . 7—9

§ 19. Die Riemannsche Fläche, ihre Beschreibung 9

§ 20. Die Zerschneidung der Fläche durch Querschnitte, ihr Zusammenhang. Zeichnung 10

§ 21. Die überall endlichen Integrale. Elementarintegrale 11

§ 22. Die Periodicitätsmoduln der Elementarintegrale 12

§ 23. Die Zwischenintegrale und ihre Periodicitätsmoduln 12

§ 24—25. Die Normalintegrale und ihre Periodicitätsmoduln 13

§ 26. Werthe der Integrale in Verzweigungspuncten 13

Tabellen dieser Werthe unter dem Text 14. 15

§ 27—28. Die additiven Constanten K, $\mathfrak{K}$ 14

§ 29—30. Werthe von speciellen Systemen der Normalintegrale 16

§ 31. Grenzwerthe der Periodicitätsmoduln 17

§ 32. Ein Determinantensatz 18

§ 33—34. Fortsetzung der Grenzwerthermittelung 18

§ 35. Vertauschung der Querschnitte 19

§ 36. Specielle Integrale zweiter Gattung 20

§ 37—38. Verhältnisse ihrer Periodicitätsmoduln 20

§ 39. Das allgemeine Integral zweiter Gattung 21

§ 40. Grenzwerthe desselben 22

§ 41. Darstellung der Integrale dritter Gattung 22

§ 42—46. Dreiwerthige Functionen, deren dritte Potenzen einwerthig sind. Ihre Periodicität 23

§ 47. Der Fall $n = 1$. § 48. Eine Differentialgleichung . . . . . 25—28

Digitized by Google

II.

Seite

§ 1—4. Bezeichnung und Periodicität der ϑ-Functionen 29
§ 5. Transformation der ϑ-Functionen 31
§ 6. Der Fall $n = 1$ 34
§ 7. Vorbemerkung über die Charakteristik von $(N_\lambda; \mathfrak{N}_\lambda)$ 34
§ 8—13. Vollständige Darstellung der Functionen $\sqrt[3]{z-x : z-x'}$ durch ϑ-Functionen 35
§ 14. Die Charakteristik von $(N_\lambda; \mathfrak{N}_\lambda)$ ist gerade 38
§ 15—21. Darstellung allgemeiner ϑ-Functionen, deren Argumente sich um gewisse Systeme von Dritteln der Periodicitätsmoduln unterscheiden, durch algebraische Ausdrücke 39
§ 21. Einfachere algebraische Darstellung der Functionen ψ des § 12 in I 44
§ 22—23. Das Verschwinden partieller Differentialquotienten der ϑ-Functionen 44
§ 24. Specielle Formen von Integralen zweiter Gattung 46
§ 25. Darstellung der allgemeinen Integrale zweiter Gattung 46
§ 26. Die dabei auftretende additive Constante 47
§ 27—29. Speciellere Integrale zweiter Gattung 48
§ 30. Grenzwerthe von Differentialquotienten von Integralen zweiter Gattung 49
§ 31—32. Die partiellen Differentialquotienten der ϑ-Functionen 50
§ 33. Die zweiten Differentialquotienten 52
§ 34—38. Darstellung der ϑ-Funktionen mit constanten Argumenten durch die Classenmodulen k, l 52
§ 39. $(N_\lambda; \mathfrak{N}_\lambda) = (0; 0)$ 54
§ 40. Die Anfangswerthe der Integrale erster Gattung 55
§ 42. $\vartheta(0, 0)$ für $n = 1$. Beziehung zwischen zwei einfachen Integralen 55
§ 43. Darstellung der partiellen Differentialquotienten mit den Argumenten verschwindender ϑ-Functionen durch die Classenmoduln 55
§ 44—46. Einige Formeln für den Fall $n = 1$. 57

Digitized by Google

I.

Algebraische Functionen und Integrale algebraischer Functionen.

Einleitung. Bekanntlich spielen die Verzweigungspuncte in der Theorie der Abel'schen Functionen dann eine besonders hervorragende Rolle, wenn die zu Grunde liegende irrationale Grösse nur zweiwerthig ist. Etwas Aehnliches findet jedoch auch dann statt, wenn die eine Klasse Abel'scher Functionen bestimmende irrationale Grösse wie eine dreiblättrige Riemann'sche Fläche mit lauter doppelten Windungspuncten verzweigt ist. Zwar sind in diesem Falle diejenigen Functionen, die man im engern Sinne „Abel'sche Functionen" nennt, nämlich zweiwerthige Functionen, deren Quadrate einwerthig sind und in $p-1$ Puncten unendlich gross und in $p-1$ andern unendlich klein zweiter Ordnung werden, nicht so beschaffen, dass ihre Null- und Unendlichkeitspunkte Verzweigungspunkte sind, sondern es hängt die Lage derselben von complicirten algebraischen Gleichungen ab. Allein wenn man nicht auf der Darstellung jener Abel'schen Functionen im engern Sinne besteht, so kann man doch in diesem Falle eine grosse Reihe von Problemen, namentlich das Rimann'sche Umkehrproblem lösen, und zwar so lösen, dass man auch die Möglichkeit praktischer Anwendungen erkennt, was schon für den Fall $p=3$ bei allgemeiner Irrationalität jetzt noch kaum als erreicht angesehen werden kann. Schon aus diesem Grunde scheint mir eine Behandlung von Abel'schen Functionen deren bestimmende irrationale Grösse

$$\sqrt[3]{\frac{z-k_1}{z-\mathfrak{k}_1}\cdot\frac{z-k_2}{z-\mathfrak{k}_2}\cdot\frac{z-k_3}{z-\mathfrak{k}_3}\cdots\frac{z-k_{n+1}}{z-\mathfrak{k}_{n+1}}}$$

ist, wünschenwerth, andererseits wird auch die grosse Analogie und doch Verschiedenheit, die zwischen diesem Falle und dem einer zweiwerthigen Irrationalität besteht, das Interesse der Mathematiker erregen können.

Würde man von den Verzweigungswerthen einige paarweise, oder zu dreien zusammen fallen lassen, so würde man die Irrationalität dadurch etwas verallgemeinern. Wollte man aber diese Fälle zugleich mit behandeln, so würden doch Weiterungen herbeigeführt, durch welche die Uebersichtlichkeit litte. Deshalb soll hier angenommen werden, dass die Verzweigungswerthe $k_1, k_2 \ldots k_{n+1}$, $\mathfrak{k}_1 \ldots \mathfrak{k}_{n+1}$ alle von einander verschieden seien. Mit k oder $\mathfrak{k}$ wird im Folgenden ein unbestimmter der Verzweigungswerthe $k_1, k_2, \ldots$ bez. $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots$ bezeichnet werden, mit $\varkappa, \varkappa', \varkappa_\nu$ etc. irgend einer der Werthe $k_1\ k_2 \ldots \mathfrak{k}_{n+1}$. In Bezug auf Determinanten ist jetzt eine abkürzende und hier anzuwendende Bezeichnungsweise ziemlich allgemein eingeführt, jedoch noch nicht so allgemein, dass man auf ihre Erklärung Verzicht leisten könnte. Ich meine die Bezeichnungsweise:

$$|\,F(\lambda,\lambda')\,| \text{ statt } \begin{vmatrix} F(1,1) & F(1,2) & \ldots & F(1,n) \\ F(2,1) & F(2,2) & \ldots & F(2,n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F(n,1) & F(n,2) & \ldots & F(n,n) \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

wofür auch noch kürzer, wenn es deutlich genug ist $|F|$ geschrieben wird. Die Buchstaben λ und λ' welche bei dieser Bezeichnungsweise feststehend sein mögen, sind hier wie Argumente einer Function geschrieben, treten aber gelegentlich in verschiedenen Formen auf. So kann für $F(\lambda,\lambda')$ eine der Grössen $\frac{\partial u_\lambda}{\partial z_{\lambda'}}$ oder $k_\lambda^{\lambda'}$ oder $a_{\lambda\lambda'}$ u. s. w. eintreten. Die Anzahl der Elemente einer solchen Determinante wird meistens n^2 sein, wird aber wenn es nöthig ist, und namentlich wenn sie nicht n^2 ist, besonders angegeben werden. Eine weitere Abkürzung ist die, dass wir τ für $e^{\frac{2i\pi}{3}}$, τ^2 für $e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ schreiben. Die Riemann'sche Abhandlung über Abels'che Functionen in Crelle's Journal B. 54 pag. 101 bis 155 soll mit (R. pag. . .) citirt werden.

Die einwerthigen Functionen von s und z.

§ 1. Die Functionen, welche in dieser Schrift betrachtet werden, sind Functionen von zwei Veränderlichen s und z, von denen die eine mit der andern durch die Gleichung

$$s = \sqrt[3]{\frac{z-k_1}{z-\mathfrak{k}_1}\cdot\frac{z-k_2}{z-\mathfrak{k}_2}\cdots\frac{z-k_{n+1}}{z-\mathfrak{k}_{n+1}}} = \sqrt[3]{\frac{P(z)}{\mathfrak{P}(z)}}$$

zusammenhängt. Es empfiehlt sich, für den reciproken Werth dieser Function noch eine besondere Bezeichnung einzuführen, nämlich

$$\mathfrak{s} = \sqrt[3]{\frac{z-\mathfrak{k}_1}{z-k_1}\cdot\frac{z-\mathfrak{k}_2}{z-k_2}\cdots\frac{z-\mathfrak{k}_{n+1}}{z-k_{n+1}}} = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{P}(z)}{P(z)}}.$$

Ferner sollen die Differentialquotienten der Grössen

$$P(z) = (z-k_1)(z-k_2)\ldots(z-k_{n+1}),\quad \mathfrak{P}(z) = (z-\mathfrak{k}_1)(z-\mathfrak{k}_2)\ldots(z-\mathfrak{k}_{n+1})$$

genommen nach z mit $P'(z)$ und $\mathfrak{P}'(z)$ bezeichnet werden. Endlich soll $P(z)\,.\,\mathfrak{P}(z)$ mit $R(z)$ und der Differentialquotient mit $R'(z)$ bezeichnet werden.

Jede rationale Function von s und z kann auf die Form

$$(L+Ms+Ns^2):(L'+M's+N's^2) = (L\mathfrak{s}^2+M\mathfrak{s}+N):(L'\mathfrak{s}^2+M'\mathfrak{s}+N')$$

gebracht werden, wenn L, M, N, L', M', N' ganze Functionen von z sind. Denn jede höhere Potenz von s kann mittels der Gleichung $s^n = P(z)\,s^{n-3}:\mathfrak{P}(z) = P^2(z)\,s^{n-6}:\mathfrak{P}^2(z)$ etc. fortgeschafft werden. Man kann aber auch noch, indem man Zähler und Nenner mit $(L'+M's\tau+N's^2\tau^2)\,.\,(L'+M's\tau^2+N's^2\tau)$ multiplicirt und von Neuem ordnet, das Irrationale ganz aus dem Nenner fortschaffen, so dass die allgemeinste Form einer einwerthigen Function von s und z oder $\mathfrak{s}$ und z die ist

$$(A+Bs+Cs^2):D,$$

wenn $A\,B\,C\,D$ ganze Functionen von z sind.

§ 2. Soll eine Function von s und z in willkürlich vorgegebenen Puncten unendlich gross werden, so muss die Anzahl dieser Puncte mindestens $2n+1$ sein. Die Anzahl der willkürlichen Constanten ist dann 2. Bezeichnen wir mit $\Delta(z, z_1, z_2, \ldots z_m)$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 & \ldots & z^m \\ 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \ldots & z_1^m \\ 1 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 & \ldots & z_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_m & z_m^2 & z_m^3 & \ldots & z_m^m \end{vmatrix},$$

von der wir sogleich die Eigenschaften notiren

$$\Delta(z, z_1 \ldots z_m) = \Delta(z, z_1 \ldots z_{m-1})\,.\,z_m - z\,.\,z_m - z_1 \ldots z_m - z_{m-1},$$

$$\Delta(z, z_1 \ldots z_m) =$$

$$= (-1)^{m-\mu}\,\Delta(z, z_1 \ldots z_{\mu-1},\quad z_{\mu+1}\ldots z_m)\,.\,(z_\mu - z)\,.\,(z_\mu - z_1)\,.\,(z_\mu - z_{\mu-1})\,(z_\mu - z_{\mu+1})\ldots(z_\mu - z_m),$$

so kann eine Function, welche in den $p+1 = 2n+1$ Puncten $s_1, z_1;\ s_2, z_2;\ \ldots;\ s_{p+1}, z_{p+1}$ unendlich

Digitized by Google

gross erster Ordnung wird, auf die Form eines Quotienten gebracht werden, dessen Nenner $\Delta(z, z_1 \ldots z_{p+1})$ ist, dessen Zähler aber die Determinante von $2p+4 = 4n+4$ Reihen ist:

$$\begin{vmatrix}
1, & z, & z^2, & \ldots & z^{p+1}, & s\mathfrak{P}, & s\mathfrak{P}z & \ldots & s\mathfrak{P}z^n, & s^2\mathfrak{P}, & s^2\mathfrak{P}z & \ldots & s^2\mathfrak{P}z^n \\
1, & z_1, & z_1^2, & \ldots & z_1^{p+1}, & \tau s_1\mathfrak{P}_1, & \tau s_1\mathfrak{P}_1 z_1 & \ldots & \tau s_1\mathfrak{P}_1 z_1^n, & \tau^2 s_1^2\mathfrak{P}_1, & \tau^2 s_1^2\mathfrak{P}_1 z_1 & \ldots & \tau^2 s_1^2\mathfrak{P}_1 z_1^n \\
1, & z_1, & z_1^2, & \ldots & z_1^{p+1}, & \tau^2 s_1\mathfrak{P}_1, & \tau^2 s_1\mathfrak{P}_1 z_1 & \ldots & \tau^2 s_1\mathfrak{P}_1 z_1^n, & \tau s_1^2\mathfrak{P}_1, & \tau s_1^2\mathfrak{P}_1 z_1 & \ldots & \tau s_1^2\mathfrak{P}_1 z_1^n \\
1, & z_2, & z_2^2, & \ldots & z_2^{p+1}, & \tau s_2\mathfrak{P}_1 & & \ldots & \tau s_2\mathfrak{P}_2 z_2^n, & \tau^2 s_2^2\mathfrak{P}_2, & & \ldots & \tau^2 s_2^2\mathfrak{P}_2 z_2^n \\
1, & z_2, & z_2^2, & \ldots & z_2^{p+1}, & \tau^2 s_2\mathfrak{P}_2 & & \ldots & \tau^2 s_2\mathfrak{P}_2 z_2^n, & \tau s_2^2\mathfrak{P}_2, & & \ldots & \tau s_2^2\mathfrak{P}_2 z_1^n \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
1, & z_{p+1}, & z_{p+1}^2, & \ldots & z_{p+1}^{p+1}, & \tau s_{p+1}\mathfrak{P}_{p+1} & & \ldots & \tau s_{p+1}\mathfrak{P}_{p+1} z_{p+1}^n, & \tau^2 s_{p+1}^2\mathfrak{P}_{p+1} & & \ldots & \tau^2 s_{p+1}^2\mathfrak{P}_{p+1} z_{p+1}^n \\
1, & z_{p+1}, & z_{p+1}^2, & \ldots & z_{p+1}^{p+1}, & \tau^2 s_{p+1}\mathfrak{P}_{p+1} & & \ldots & \tau^2 s_{p+1}\mathfrak{P}_{p+1} z_{p+1}^n, & \tau s_{p+1}^2\mathfrak{P}_{p+1} & & \ldots & \tau s_{p+1}^2\mathfrak{P}_{p+1} z_{p+1}^n \\
1, & \zeta & \zeta^2 & \ldots & \zeta^{p+1}, & \sigma\mathfrak{P}(\zeta) & & \ldots & \sigma\mathfrak{P}(\zeta)\zeta^n, & \sigma^2\mathfrak{P}(\zeta), & & \ldots & \sigma^2\mathfrak{P}(\zeta)\zeta^n
\end{vmatrix}$$

Hierin hat τ die gewöhnliche Bedeutung einer dritten Wurzel der Einheit, und es ist $\sigma\sigma\sigma = P(\zeta):\mathfrak{P}(\zeta)$ und der Kürze halber $\mathfrak{P}_\nu$ statt $\mathfrak{P}(z_\nu)$ gesetzt. Die beiden willkürlichen Constanten sind hier ζ und ein willkürlicher Factor.

§ 3. Sind zwei Werthepaare, in denen die Function des vorigen Paragraphen unendlich wird, so beschaffen, dass sie zu demselben z gehören, z.B. wenn die Function für $s, z = s_p\tau, z_p$ und $s_p\tau^2, z_p$ unendlich gross wird, wobei $s_p\tau, z_p$ für s_p, z_p; $s_p\tau^2, z_p$ für $s_{p+1}\, z_{p+1}$ geschrieben ist, so werden Zähler und Nenner identisch Null, weil je zwei Reihen in den Determinanten einander gleich werden. Man kann aber dann die Function auf die Form eines Quotienten bringen, dessen Nenner $\Delta(z, z_1, \ldots z_p)$ ist, der Zähler aber die Determinante mit $2p+1 = 4n+1$ Reihen:

$$\begin{vmatrix}
1, & z, & \ldots & z^p, & s\mathfrak{P} & & \ldots & s\mathfrak{P}z^{n-1}, & s^2\mathfrak{P}, & & \ldots & s^2\mathfrak{P}z^{n-1} \\
1, & z_1, & \ldots & z_1^p, & \tau s_1\mathfrak{P}_1 & & \ldots & \tau s_1\mathfrak{P}_1 z_1^{n-1}, & \tau^2 s_1^2\mathfrak{P}_1, & & \ldots & \tau^2 s_1^2\mathfrak{P}_1 z_1^{n-1} \\
1, & z_1, & \ldots & z_1^p, & \tau^2 s_1\mathfrak{P}_1 & & \ldots & \tau^2 s_1\mathfrak{P}_1 z_1^{n-1}, & \tau s_1^2\mathfrak{P}_1, & & \ldots & \tau s_1^2\mathfrak{P}_1 z_1^{n-1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
1, & z_{p-1} & \ldots & z_{p-1}^p, & \tau s_{p-1}\mathfrak{P}_{p-1} & \ldots & \tau s_{p-1}\mathfrak{P}_{p-1} & z_{p-1}^{n-1}, & \tau^2 s_{p-1}^2\mathfrak{P}_{p-1} & \ldots & \tau^2 s_{p-1}^2\mathfrak{P}_{p-1} & z_{p-1}^{n-1} \\
1, & z_{p-1} & \ldots & z_{p-1}^p, & \tau^2 s_{p-1}\mathfrak{P}_{p-1} & \ldots & & & & & \ldots \tau\, s_{p-1}^2\mathfrak{P}_{\mu-1} & z_{p-1}^{n-1} \\
1, & z_p & \ldots & z_p^p, & s_p\mathfrak{P}_p & \ldots & s_p\mathfrak{P}_p z_p^{n-1}, & & & & \ldots s_p^2\mathfrak{P}_p z_p^{n-1} & \\
1, & \zeta & \ldots & \zeta^p, & \sigma\mathfrak{P}(\zeta) & \ldots & & & & & \ldots \sigma^2\mathfrak{P}(\zeta)\zeta^{n-1} &
\end{vmatrix},$$

so dass wieder zwei Constante vorhanden sind.

§ 4. Wird die Function in den $2n+2$ Werthpaaren $s_1\tau, z_1$; $s_1\tau^2, z_1$; $s_2\tau, z_2$; $s_2\tau^2, z_2, \ldots s_{n+1}\tau, z_{n+1}$; $s_{n+1}\tau^2, z_{n+1}$ unendlich gross erster Ordnung, so wird der Nenner $\Delta(z, z, \ldots z_{n+1})$ der Zähler aber die Determinante mit $n+4$ Reihen

$$\begin{vmatrix}
1, & z, & \ldots & z^{n+1}, & s\mathfrak{P}, & s^2\mathfrak{P} \\
1, & z_1, & \ldots & z_1^{n+1}, & s_1\mathfrak{P}_1, & s_1^2\mathfrak{P}_1 \\
1, & z_2, & \ldots & z_2^{n+1}, & s_2\mathfrak{P}_1, & s_2^2\mathfrak{P}_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
1, & z_{n+1}, & \ldots & z_{n+1}^{n+1}, & s_{n+1}\mathfrak{P}_{n+1}, & s_{n+1}^2\mathfrak{P}_{n+1} \\
1, & \zeta_1, & \ldots & \zeta_1^{n+1}, & \sigma_1\mathfrak{P}(\zeta_1), & \sigma_1^2\mathfrak{P}(\zeta_1) \\
1, & \zeta & \ldots & \zeta^{n+1}, & \sigma\mathfrak{P}(\zeta), & \sigma^2\mathfrak{P}(\zeta)
\end{vmatrix}$$

Digitized by Google

Die Function enthält drei willkürliche Constante nämlich ζ und ζ_1 und einen willkürlichen Factor. Wirft man ζ_1 σ_1 auf ein Werthepaar $s_\nu \tau$, z_ν so wird die Function in $2n+1$ Puncten unendlich gross und enthält dann wieder 2 Constante.

§ 5. Wird eine Function für die Werthepaare s_1, z_1; s_2, z_2; . . . s_{p-1}, z_{p-1}; $s_p, z_p = s_{p-1}\tau$, z_{p-1}; $s_{p+1}, z_{p+1} = s_{p-1}\tau^2$, z_{p-1} unendlich gross erster Ordnung, so braucht man nur in der im § 3 gebildeten Function in der Zähler-Determinante ζ_1 für z_p und σ_1 für s_p zu setzen. Hieraus ergiebt sich, dass eine Function, die in $2n+1$ Puncten unendlich gross erster Ordnung wird, drei willkürliche Constante (nämlich ζ, ζ_1 und einen Factor) enthält, wenn sie in drei Werthepaaren mit demselben z, also s, z; $s\tau, z$; $s\tau^2, z$ unendlich wird. Geschieht dies nicht nur für einen Werth z_p sondern für μ Werthe, so ist die Anzahl der Constanten $2+\mu$. Man vergleiche hierüber einen Aufsatz von Roch in Crelle's Journal B. 64, pag. 372.

§ 6. Wird eine Function in Verzweigungspuncten unendlich gross erster Ordnung, so kann man die Form des § 2 ebenfalls nicht verwenden, weil dann paarweise Reihen der Zähler-Determinante einander gleich werden. Wird jedoch die Function in jedem Verzweigungspuncte, in dem sie unendlich wird, unendlich gross zweiter Ordnung, so lässt sich die Form des § 2, passend erweitert anwenden. Sind $\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_\mu$ die μ Verzweigungspuncte, in denen die Function unendlich gross zweiter Ordnung wird, so kann man zum Nenner die Determinante $\Delta(z, z_1, z_2 \ldots z_{p+1-\mu}, \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_\mu)$ nehmen, während der Zähler die Determinante ist:

$$\begin{vmatrix}
1, z & \ldots z^{p+1}, & \mathfrak{P}s, & \mathfrak{P}sz, & \mathfrak{P}sz^n, & \mathfrak{P}s^2, & \mathfrak{P}s^2z, & \ldots \mathfrak{P}s^2z^n \\
1, z_1, & \ldots z_1^{p+1}, & \tau\mathfrak{P}_1 s, & \tau\mathfrak{P}_1 s_1 z_1, & \tau\mathfrak{P}_1 s_1 z_1^n, & z^2\mathfrak{P}_1 s^2, & \tau^2\mathfrak{P}_1 s_1^2 z_1, & \ldots \tau^2\mathfrak{P}_1 s_1^2 z_1^n \\
1, z_1, & \ldots z_1^{p+1}, & \tau^2\mathfrak{P}_1 s_1, & \tau^2\mathfrak{P}_1 s_1 z_1, & \tau^2\mathfrak{P}_1 s_1 z_1^n, & \tau\mathfrak{P}_1 s_1^2, & & \ldots \tau\mathfrak{P}_1 s_1^2 z_1^n \\
\vdots\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1, z_{p+1-\mu}, & \ldots & \tau\mathfrak{P}_{p+1-\mu} s_{p+1-\mu}, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \tau_2^2\mathfrak{P}_{p+1-\mu} s_{p+1-\mu}^2 z_{p+1-\mu}^n \\
1, z_{p+1-\mu}, & \ldots & \tau^2\mathfrak{P}_{p+1-\mu} s_{p+1-\mu}, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \tau\mathfrak{P}_{p+1-\mu} s_{p+1-\mu}^2 z_{p+1-\mu}^n \\
1, \zeta, & \ldots & \sigma\mathfrak{P}(\zeta) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \sigma^2\mathfrak{P}(\zeta)\zeta^n \\
\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1, \zeta_\mu, & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \sigma_\mu^2\mathfrak{P}(\zeta_\mu)\zeta_\mu^n \\
1, \varkappa_1, & \ldots \varkappa_1^{p+1}, & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots 0 \\
\vdots\ \vdots & & \vdots & & & & & \vdots \\
1, \varkappa_\mu, & \ldots \varkappa_\mu^{p+1}, & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots 0
\end{vmatrix}.$$

§ 7. Wird die Function in n Verzweigungspuncten $\varkappa_1 \ldots \varkappa_n$ doppelt und in zwei übereinander liegenden Puncten einfach unendlich, und verschwindet für $z = \varkappa_{n+1}$ und $z = \varkappa_{n+2}$, so kann man die Form des § 4 verwenden, und erhält so für den Nenner $\Delta(z, z_1, \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_n)$ für den Zähler

$$\begin{vmatrix}
1, z, & \ldots z^{n+1}, & s\mathfrak{P}, & s^2\mathfrak{P} \\
1, z_1, & \ldots z_1^{n+1}, & s_1\mathfrak{P}_1, & s_1^2\mathfrak{P}_1 \\
1, \varkappa_1, & \ldots \varkappa_1^{n+1}, & 0 & 0 \\
1, \varkappa_2, & \ldots \varkappa_2^{n+1}, & 0 & 0 \\
\vdots\ \vdots & & \vdots & \vdots \\
1, \varkappa_{n+2}, & \ldots \varkappa_{n+2}^{n+1}, & 0 & 0
\end{vmatrix} = s\,s_1\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}_1\,(s_1 - s)\,.\,\Delta(\varkappa_1\,\varkappa_2 \ldots \varkappa_{n+1}).$$

Also ist die Function, wenn man von einem constanten Factor absieht

$$s\,.\,\mathfrak{P}\,.\,(s_1 - s) : (z_1 - z)\,(z - \varkappa_1)\,(z - \varkappa_2) \ldots (z - \varkappa_n).$$

§ 8. Eine Function die in einem Verzweigungspuncte $\varkappa$ und für s_1, z_1; . . . s_p, z_p unendlich gross erster Ordnung wird, und im Puncte $\sigma\,\zeta$ verschwindet, soll mit $\Phi(s, z; s_1, z_1; \ldots s_p, z_p; \varkappa, \mid \sigma, \zeta)$ bezeichnet werden. Der Nenner derselben ist dann $\Delta(z, z_1 \ldots z_p\,\varkappa)$ der Zähler aber die Determinante von $2p+2$ Reihen,

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix}
z-\varkappa, & (z-\varkappa)^2 \ldots (z-\varkappa)^{p+1}, & s\mathfrak{P}, & s\mathfrak{P}(z-\varkappa) \ldots s\mathfrak{P}(z-\varkappa)^n, & s^2\mathfrak{P}, & s^2\mathfrak{P}(z-\varkappa) \ldots s^2\mathfrak{P}(z-\varkappa)^n \\
z_1-\varkappa, & (z_1-\varkappa)^2 \ldots (z_1-\varkappa)^{p+1}, & \tau s_1\mathfrak{P}_1, & \ldots \tau s_1\mathfrak{P}_1(z_1-\varkappa)^n, & \tau^2 s_1^2\mathfrak{P}_1 & \ldots \tau^2 s_1^2\mathfrak{P}_1(z-\varkappa)^n \\
z_1-\varkappa, & \ldots & \tau^2 s_1\mathfrak{P}_1, & \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & & \ldots \tau s_1\mathfrak{P}_1(z_1-\varkappa)^n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
z_p-\varkappa, & \ldots (z_p-\varkappa)^{p+1}, & \tau s_p\mathfrak{P}_p, & \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & & \ldots \tau^2 s_p\mathfrak{P}_p(z_p-\varkappa)^n \\
z_p-\varkappa, & \ldots (z_p-\varkappa)^{p+1}, & \tau^2 s_p\mathfrak{P}_p, & \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & & \ldots \tau s_p^2\mathfrak{P}_p(z_p-\varkappa)^n \\
\zeta-\varkappa & \ldots (\zeta-\varkappa)^{p+1}, & \sigma\mathfrak{P}(\zeta), & \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & & \ldots \sigma^2\mathfrak{P}(\zeta)(\zeta-\varkappa)^n
\end{vmatrix}$$

worin entweder die Vertikalreihe $s\mathfrak{P}$, $s_1\tau\mathfrak{P}_1$, $s_1\tau^2\mathfrak{P}_1$ etc. oder die Vertikalreihe $s^2\mathfrak{P}$, $s_1^2\tau^2\mathfrak{P}_1$ etc. zu streichen ist, je nachdem $\varkappa$ den Werthen k oder den Werthen $\mathfrak{k}$ angehört.

Ausser der Grösse ζ enthält die Function noch einen willkürlichen Factor. Ist $\zeta = \varkappa'$ so bestimmen wir diesen Factor so, dass

$$\lim_{z=\varkappa'} \sqrt[3]{\frac{z-\varkappa}{z-\varkappa'}},\ \Phi(s\,z;\ s_1\,z_1;\ \ldots\ s_p\,z_p;\ \varkappa \mid \varkappa') = 1$$

wird. Mit Hülfe der ϑ-Functionen wird sich dann später zeigen, dass diese Function oder wenigstens ihr Cubus in Bezug auf $z, z_1, \ldots z_p$ symmetrisch ist.

§ 9. Nun müssen wir eine allgemeinere Function construiren, die in einer Anzahl von Verzweigungspuncten in der ersten Ordnung und noch in einer Anzahl anderer vorgegebener Puncte unendlich wird, zusammen in $p+1$ Puncten. Die Anzahl der Puncte k in welchem die Function unendlich wird sei m und das Produkt der Differenzen $z-k'.z-k''\ldots z-k^{(m)}$ sei $Q(z)$ wenn $k'\ldots$ jene Verzweigungspuncte sind. Die Anzahl der Puncte $\mathfrak{k}$ sei $\mathfrak{m}$ und das Product $z-\mathfrak{k}'.z-\mathfrak{k}''\ldots z-\mathfrak{k}^{(\mathfrak{m})}$ sei $\mathfrak{Q}(z)$ und $Q(z).\mathfrak{Q}(z)$ sei $Z(z)$. Dann ist der Nenner dieser Function $Z(z).\Delta(z, z_1, z_2 \ldots z_{p+1-m-\mathfrak{m}})$ der Zähler aber die Determinante:

$$\begin{vmatrix}
Z, & Z\,z, & Z\,z^2 \ldots Z\,z^r, & s\,\mathfrak{P}\,Q, & s\mathfrak{P}Qz, \ldots & s\,\mathfrak{P}\,Q\,z^{n-m}, & s^2\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q} \ldots & s^2\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}\,z^{n-m} \\
Z_1, & Z_1 z_1, & Z_1 z_1^2 \ldots Z_1 z_1^r, & s_1\tau\,\mathfrak{P}_1 Q_1, & \ldots \tau\,s_1\mathfrak{P}_1 Q_1 z_1^{n-m}, & \tau^2 s_1^2\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_2 \ldots & \tau^2 s_1^2\,\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1 z_1^{n-m} \\
Z_1, & & \ldots Z_1 z_1^r, & \tau^2 s_1\mathfrak{P}_1 Q_1, & \ldots \tau^2 s_1\mathfrak{P}_2 Q_1 z_1^{n-m}, & \tau\,s_1^2\mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_1 \ldots & \tau\,s_1^2\,\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1 z_1^{n+m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
Z_r, & . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & & & & & \tau^2 s_r^2\mathfrak{P}_r\mathfrak{Q}_r z_r^{n-m} \\
Z_r, & . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & & & & & \tau\,s_r^2\mathfrak{P}_r\mathfrak{Q}_r z_r^{n-m} \\
Z(\zeta), & \zeta Z(\zeta) & \ldots \zeta^r Z(\zeta), & \sigma\mathfrak{P}(\zeta)\,Q(\zeta), & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & & \sigma^2\mathfrak{P}(\zeta)\,\mathfrak{Q}(\zeta)\,z_r^{n-m}
\end{vmatrix}$$

worin r kurz für $p+1-m-\mathfrak{m}$ und $Z_r\ \mathfrak{P}_r\ Q_r\ \mathfrak{Q}_r$ für $Z(z_r)\,\mathfrak{P}(z_r)\,Q(z_r)\,\mathfrak{Q}(z_r)$ gesetzt ist.

§ 10. In eine ähnliche Form lässt sich eine Function bringen, die in allen Verzweigungspuncten und in einem Puncte s_1, z_1 unendlich gross erster Ordnuug wird, sie ist nämlich, wenn R_1 statt $R(z_1)$ geschrieben wird.

$$\frac{\begin{vmatrix} R, & s\,R, & s^2\mathfrak{P}^2 \\ R_1, & \tau\,s_1\,R_1, & \tau^2 s_1^2\,\mathfrak{P}_1^2 \\ R_1, & \tau^2 s_1\,R_1, & \tau\,s_1^2\,\mathfrak{P}_1^2 \end{vmatrix}}{(z-z_1)\,R\,R_1\,\mathfrak{P}_1} = \frac{\begin{vmatrix} P, & s\,P, & s^2\mathfrak{P} \\ P_1, & \tau\,s_1\,P_1, & \tau^2 s_1^2\mathfrak{P}_1 \\ P_1, & \tau^2 s_1\,P, & \tau\,s_1^2\mathfrak{P}_1 \end{vmatrix}}{(z-z_1)\,P\,P_1}$$

$$= (\tau^2-\tau)\,\frac{P\,\mathfrak{P}_1\,s_1^2 + P\,\mathfrak{P}_1\,s\,s_1 + \mathfrak{P}\,P_1\,s^2}{P\,(z-z_1)}\cdot s_1.$$

Diese Function wird in $p+3 = 2n+3$ Puncten unendlich gross und wird deshalb dadurch, dass man eine additive und multiplicative Constante hinzufügt noch nicht die Allgemeinste ihrer Art, weil sie sechs willkürliche Constante enthalten muss, von denen zwei durch Addition von $As+B\mathfrak{s}$ beliebig bestimmt werden können. Für unsere Zwecke ist jedoch die specielle, hier gebildete Function ausreichend. Wir setzen

$$(P\,\mathfrak{P}_1\,s_1^2 + P\,\mathfrak{P}_1\,s\,s_1 + \mathfrak{P}\,P_1\,s^2) : 3\,s_1^2\,P\mathfrak{P}_1\,(z-z_1) = S(s, z;\ s_1, z_1)$$

Digitized by Google

und bemerken, dass diese Function für $z = z_1$, $s = s_1$, wie $1 : z - z_1$ unendlich wird, und für $z = \infty$ verschwindet.

§ 11. Später brauchen wir die Grenzwerthe:

$$\lim_{z = k_r} \sqrt[3]{z - k_r}\, S(s, z;\, s_1, z_1) = \frac{s_1}{3(k_r - z_1)} \cdot \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{P}(k_r)}{P'(k_r)}},$$

$$\lim_{z = \mathfrak{k}_r} \sqrt[3]{z - \mathfrak{k}_r}\, S(s, z;\, s_1, z_1) = \frac{\mathfrak{s}_1}{3(\mathfrak{k}_r - z_1)} \cdot \sqrt[3]{\frac{P(\mathfrak{k}_r)}{\mathfrak{P}'(\mathfrak{k}_r)}}.$$

§ 12. Eine Function die in den $2n$ Puncten $s_1 \tau, z_1$; $s_1 \tau^2, z_1$; $s_2 \tau, z_2$; $s_2 \tau^2, z_2$; $\ldots$ $s_n \tau, z_n$; $s_n \tau^2, z_n$ unendlich gross erster Ordnung wird, und im Puncte x unendlich gross zweiter Ordnung, im Puncte x' unendlich klein zweiter Ordnung, ist bis auf einen constanten Factor bestimmt, den wir vorläufig willkürlich lassen. Wir bezeichnen die Function mit $\Psi(z, z_1\, z_2 \ldots z_n, x \mid x')$ und haben alsdann

$$\Psi(z, z_1 \ldots z_n, \mathfrak{k} \mid k') = \begin{vmatrix} z - \mathfrak{k}, & (z-\mathfrak{k})^2, & \ldots & (z-\mathfrak{k})^{n+1}, & \mathfrak{s}\ P \\ z_1 - \mathfrak{k}, & (z_1-\mathfrak{k})^2, & \ldots & (z_1-\mathfrak{k})^{n+1}, & \mathfrak{s}\ P_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z_n - \mathfrak{k}, & (z_n-\mathfrak{k})^2, & \ldots & (z_n-\mathfrak{k})^{n+1}, & \mathfrak{s}_n P_n \\ k' - \mathfrak{k}, & (\mathfrak{k}^2-\mathfrak{k})^2, & \ldots & (\mathfrak{k}^2-\mathfrak{k})^{n+1}, & 0 \end{vmatrix} : \Delta(z, z_1 \ldots z_n, \mathfrak{k})$$

$$\Psi(z, z_1 \ldots z_n, k \mid \mathfrak{k}') = \begin{vmatrix} z - k, & (z-k)^2, & \ldots & (z-k)^{n+1}, & s\ \mathfrak{P} \\ z_1 - k, & & \ldots & (z_1-k)^{n+1}, & s_1 \mathfrak{P} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z_2 - k, & & \ldots & (z_1-k)^{n+1}, & s_n \mathfrak{P}_n \\ \mathfrak{k}' - k, & (\mathfrak{k}'-k)^2, & \ldots & (\mathfrak{k}'-k)^{n+1}, & 0 \end{vmatrix} : \Delta(z, z_1 \ldots z_n, k)$$

$$\Psi(z, z_1 \ldots z_n, k \mid k') = \begin{vmatrix} z - k, & (z-k)^2 & \ldots & (z-k)^{n+1}, & s\ \mathfrak{P}, & \mathfrak{s}\ P \\ z_1 - k, & (z_1-k)^2 & \ldots & (z_1-k)^{n+1}, & s_1 \mathfrak{P}_1, & \mathfrak{s}_1 P_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_n - k, & (z_n-k)^2 & \ldots & (z_n-k)^{n+1}, & s_n \mathfrak{P}_n, & \mathfrak{s}_n P_n \\ k' - k, & (k'-k)^2 & \ldots & (k'-k)^{n+1}, & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} : \Delta(z, z_1 \ldots z_n, k)$$

$$= \begin{vmatrix} z - k, & (z-k)^2 & \ldots & (z-k)^{n+1}, & \mathfrak{s}\ P \\ z_1 - k, & (z_1-k)^2 & \ldots & (z_1-k)^{n+1}, & \mathfrak{s}_1 P_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z_n - k, & (z_n-k)^2 & \ldots & (z_n-k)^{n+1}, & \mathfrak{s}_n P_n \\ k' - k, & (k'-k)^2 & \ldots & (k'-k)^{n+1}, & 0 \end{vmatrix} : \Delta(z, z_1 \ldots z_n, k)$$

Diese letzte Function wird aber im Puncte k nur unendlich gross erster Ordnung, und es zeigt sich, wenn x oder x' der Reihe der k oder der Reihe der $\mathfrak{k}$ beide zugleich angehören, dass dann von dem Nullpuncte der Function Ψ einer auf den Verzweigungspunct fällt, in welchem die Function unendlich gross zweiter Ordnung werden sollte, so dass sie nur in der ersten Ordnung unendlich wird.

Wir notiren noch die speciellen Functionen

$$\Psi(z, \zeta, x_1, x_2 \ldots x_n \mid k) = \text{Const.}\ \frac{s^2 \mathfrak{P}(z)(\zeta - k) \prod_{1(\nu)}^{n}(\zeta - x_\nu) - \sigma^2 \mathfrak{P}(\zeta)(z-k) \prod_{1(\nu)}^{n}(z - x_\nu)}{(z-\zeta) \prod_{1(\nu)}^{n}(\zeta - x_\nu)(z - x_\nu)}$$

$$\Psi(z, \zeta, x_1, x_2 \ldots x_n \mid \mathfrak{k}) = \text{Const.}\ \frac{s\, \mathfrak{P}(z)(\zeta - \mathfrak{k}) \prod_{1(\nu)}^{n}(\zeta - x_\nu) - \sigma\, \mathfrak{P}(\zeta)(z-\mathfrak{k}) \prod_{1(\nu)}^{n}(z - x_\nu)}{(z-\zeta) \prod_{1(\nu)}^{n}(\zeta - x_\nu)(z - x_\nu)}$$

Digitized by Google

und noch einfacher

$$\Psi(z, z_1, k_1\, k_2 \ldots k_n \mid k_{n+1}) = \text{Const.}\, \frac{\mathfrak{s}-\mathfrak{s}_1}{z-z_1}\,(z-k_{n+1})\,(z_1-k_{n+1})$$

$$\Psi(z, z_1, \mathfrak{k}_1\, \mathfrak{k}_2 \ldots \mathfrak{k}_n \mid \mathfrak{k}_{n+1}) = \text{Const.}\, \frac{s-s_1}{z-z_1}\,(z-\mathfrak{k}_{n+1})\,(z_1-\mathfrak{k}_{n+1}).$$

§ 12[a]. Wir construiren nun noch eine allgemeinere Function $\Psi(z, z_1 \ldots z_n\, \varkappa_1\, \varkappa_2 \ldots \varkappa_\mu \mid \varkappa'_1, \varkappa'_2 \ldots \varkappa'_\mu)$ welche in den $2n$ Puncten s_ν, τ, z_ν; $s_\nu \tau^2, z_\nu$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ unendlich gross erster Ordnung wird, und in den Puncten $\varkappa_1\, \varkappa_2 \ldots \varkappa_\mu$ unendlich gross zweiter Ordnung, und in den Puncten $\varkappa'_1\, \varkappa'_2 \ldots \varkappa'_\mu$ unendlich klein zweiter Ordnung. Hierzu sei

$$Z(z_\nu) = Z_\nu = z_\nu - \varkappa'_1 \,.\, z_\nu - \varkappa'_2 \,.\,.\,. z_\nu - \varkappa'_\mu, \quad Q_\nu = z_\nu - \varkappa'_1 \,.\, z_\nu - \varkappa'_2 \ldots z_\nu - \varkappa'_\varepsilon,$$
$$\mathfrak{Q}_\nu = z_\nu - \varkappa'_{\varepsilon+1} \,.\, z_\nu - \varkappa'_{\varepsilon+2} \ldots z_\nu - \varkappa'_\mu,$$

wenn die Puncte $\varkappa_1 \ldots \varkappa'_\varepsilon$ der Reihe der k und $\varkappa'_{\varepsilon+1} \ldots \varkappa'_\mu$ der Reihe der $\mathfrak{k}$ angehören, dann ist

$$\Delta(z, z_1, z, \ldots z_n, \varkappa_1\, \varkappa_2 \ldots \varkappa_\mu) \,.\, \Psi(z, z_1 \ldots z_n\, \varkappa_1\, \varkappa_2 \ldots \varkappa_\mu \mid \varkappa'_1\, \varkappa'_2 \ldots \varkappa'_\mu) =$$

$$\begin{vmatrix}
Z, & z\,Z & \ldots & z^n\,Z & , s\,\mathfrak{P}\,Q, & z\,s\,\mathfrak{P}\,Q, & \ldots z^{\mu-\varepsilon-1}\,s\,\mathfrak{P}\,Q, & \mathfrak{s}\,P\,\mathfrak{Q}, & z\mathfrak{s}\,P\mathfrak{Q} \ldots z^{\varepsilon-1}\mathfrak{s}\,P\,\mathfrak{Q} \\
Z_1, & z_1 Z_1 & \ldots & z_1^n\,Z_1 & , s_1\mathfrak{P}_1 Q_1, & z_1 s_1 \mathfrak{P}_1 Q_1, & \ldots z^{\mu-\varepsilon-1} s_1 \mathfrak{P}_1 Q_1, & \mathfrak{s}_1 P_1 \mathfrak{Q}_1, & \ldots z_1^{\varepsilon-1}\mathfrak{s}_1 P_1 \mathfrak{Q}_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
Z_n, & z_n Z_n & \ldots & z_n^n\,Z_n & , s_n\mathfrak{P}_1 Q_n, & z_n s_n \mathfrak{P}_n Q_n, & \ldots z_n^{\mu-\varepsilon-1} s_n \mathfrak{P}_n Q_n, & \mathfrak{s}_n P_n \mathfrak{Q}_n, & \ldots z_n^{\varepsilon-1}\mathfrak{s}_n P_n \mathfrak{Q}_n \\
Z(\varkappa_1), & \varkappa_1 Z(\varkappa_1) & \ldots & \varkappa_1^n\,Z(\varkappa_1), & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & \ldots 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
Z(\varkappa_\mu), & \varkappa_\mu Z(\varkappa_\mu) & \ldots & \varkappa_\mu^{n+1}\,Z(\varkappa_\mu), & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & \ldots 0
\end{vmatrix}$$

Ein constanter Factor bleibt dabei willkürlich.

Die Functionen φ.

§ 13. Sind $F^{(m)}(z)$, $\mathfrak{F}^{(m)}(z)$ ganze Functionen von z vom Grade m mit willkürlichen Coefficienten also mit je $m+1$ willkürlichen Constanten, so nennt Riemann die mit manchen ausgezeichneten Eigenschaften behaftete Function

$$s\,F^{(n-1)}(z) + \mathfrak{F}^{(n-1)}(z)$$

eine Function $\varphi(s, z)$ und die $2p-2$ Werthepaare, für welche eine solche Function verschwindet, *durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpfte Werthepaare.* In der Function φ sind als specielle Fälle solche enthalten, welche in weniger als $2p-2$ Puncten verschwinden, und es fragt sich, welche $2p-2$ Puncte dann als durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpfte Puncte anzusehen sind. In diesem Falle muss man zu diesen Puncten diejenigen hinzunehmen, in welchen die allgemeine Function φ unendlich wird, die specielle aber endlich bleibt. Z. B. die durch die Gleichung $s = 0$ verknüpften $2p-2$ Puncte sind die $n+1$ Verzweigungspuncte $k_1\, k_2 \ldots k_{n+1}$, in denen s verschwindet, dazu sind aber noch die drei Werthepaare $(s, z) = (1, \infty)$, (τ, ∞), (τ^2, ∞) je n—1 mal, also $3n$—3 Puncte hinzuzufügen, weil dort φ im Allgemeinen unendlich gross $n-1$ter Ordnung wird, das $\varphi = s$ aber endlich bleibt. Die durch die Gleichung $z - z_1 = 0$ verknüpften Werthepaare sind erstens die: (s_1, z_1), (s, τ, z_1), (s, τ^2, z_1), sodann die: $(1, \infty)$, (τ, ∞), (τ^2, ∞) je $n-2$mal und dann noch die Puncte $\mathfrak{k}_1\, \mathfrak{k}_2 \ldots \mathfrak{k}_{n+1}$, in denen φ im Allgemeinen unendlich wird, das specielle $\varphi = z - z_1$ aber endlich bleibt. Es ist leicht ersichtlich, dass zur Bestimmung von $2p-2$ durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpften Puncten auch die Function

$$\mathfrak{s}\,\mathfrak{F}^{(n-1)}(z) + F^{(n-1)}(z)$$

genommen werden könnte.

§ 14. *Verschwindet eine Function φ für $(s, z) = (s_1 \tau, z_1)$, $(s_1 \tau^2, z_1)$ so verschwindet sie auch für $(s, z) = (s_1, z_1)$.* In der That setzt man $s_1 \tau F^{(n-1)}(z_1) + \mathfrak{F}^{(n-1)}(z_1) = 0$, $s_1 \tau^2 F^{(n-1)}(z_1) + \mathfrak{F}^{(n-1)}(z_1) = 0$ so folgt durch Subtraction $\tau(1-\tau)\, s_1\, F^{(n-1)}(z_1) = 0$. Wenn aber z_1 kein Verzweigungspunct ist, so muss $F(z_1)$ Null sein, und also auch $\mathfrak{F}(z_1)$ muss Null sein, also hat die Function den Factor $z - z_1$.

Digitized by Google

§ 15. *Verschwindet eine Function φ in einem Verzweigungspuncte zweimal, so verschwindet sie dort auch noch zum dritten Male.* Dieser Satz ist nur ein specieller Fall von dem des vorigen Paragraphen, und kann ebenso bewiesen werden, nur machen die Puncte $\mathfrak{k}$ eine besondere Betrachtung nöthig, weil in ihnen die Function φ unendlich wird. Wird φ in einem Puncte k unendlich klein, so muss nothwendig $\mathfrak{F}(k)$ verschwinden, dann ist die Ordnung aber immer nur die erste. Deshalb muss auch noch $F(k)$ verschwinden. Dann ist aber die Ordnung die dritte. Bleibt φ in einem Puncte $\mathfrak{k}$ endlich, so muss $F(\mathfrak{k})$ verschwinden. Dann ist aber nur ein Punct fortgefallen, und erst wenn auch $F(\mathfrak{k})$ verschwindet, wird $\varphi(\mathfrak{k})$ unendlich klein, aber unendlich klein zweiter Ordnung. Dies ist aber aequivalent dem, dass drei Puncte Null auf einen Punct $\mathfrak{k}$ gefallen sind. Man kann im letzten Falle für φ auch die Function $F + \mathfrak{F}\mathfrak{s}$ nehmen, so wird die Untersuchung der frühern analog.

§ 16. Wir können somit den Satz aussprechen: Verschwindet eine Function φ in einem Verzweigungspuncte zweimal, (oder wird sie wenn derselbe ein Punct $\mathfrak{k}$ ist unendlich klein erster Ordnung) so befindet sich unter den, diesen Puncten durch die Gleichung $\varphi = 0$ verknüpften Puncten, derselbe Verzweigungspunct mindestens noch einmal vielleicht auch zweimal.

§ 17. Wir erledigen nun die Frage: Wenn von den $2p-2$ durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpften Puncten $p-1$ Verzweigungspuncte, die einfach oder doppelt, aber nicht dreifach vorkommen, sind, welches sind die übrigen? Sind $\varkappa_1\, \varkappa_2 \ldots \varkappa_\mu$ solche von den $2p-2$ einander verknüpften Puncten welche doppelt zu rechnen sind, so muss nach Obigem die Function φ die Form haben $(z-\varkappa_1)(z-\varkappa_2)\ldots(z-\varkappa_\mu)(s\,F(z^{n-\mu-1}) + \mathfrak{F}(z^{n-\mu-1}))$. Die übrigen $p-1-\mu$ Verzweigungspuncte, die nur als einfach vorkommend vorgegeben sind, seien $k'_1, k'_2, \ldots k'_\nu, \mathfrak{k}'_1, \mathfrak{k}'_2 \ldots \mathfrak{k}'_\varrho$, und es sei $2\mu+\nu+\varrho = p-1$. Dann muss $\mathfrak{F}(z^{n-m-1})$ für $z = k'_1\, k'_2 \ldots k'_\nu$ verschwinden, und also entweder muss $\mu+\nu \geqq n-1$ sein, oder es muss $\mathfrak{F} = 0$ sein. Ferner muss $F(z^{n-\mu-1})$ für $z = \mathfrak{k}'_1, \mathfrak{k}'_2 \ldots \mathfrak{k}'_\varrho$ verschwinden, und also entweder muss $\mu+\varrho \geqq n-1$ sein, oder F muss identisch verschwinden. F und $\mathfrak{F}$ müssen zusammen $\nu+\varrho = p-1-2\mu = 2(n-\mu)-1$ Factoren $z-k$, $z-\mathfrak{k}$ enthalten. Da sie aber nur $2n-2\mu-2$ Factoren zusammen enthalten können, so muss nothwendig eine der beiden Grössen F oder $\mathfrak{F}$ Null sein. Ist nun zuerst $\mathfrak{F} = 0$ also $\mu+\nu > n-1$ und $\mu+\varrho < n-1$ so geht die Function φ in die Form über $z-k_1 \,.\, z-k_2 \ldots z-k_\mu \,.\, z-\mathfrak{k}'_1 \ldots z-\mathfrak{k}'_\varrho \,.\, s\,.\, F(z^{n-\mu-\varrho-1})$.

Die Function verschwindet also erstens noch zum dritten Male in den Puncten $k_1\, k_2 \ldots k_\mu$ wird ferner unendlich klein zweiter Ordnung für $z = \mathfrak{k}'_1\, \mathfrak{k}'_2 \ldots \mathfrak{k}'_\varrho$ und verschwindet endlich in den von $k'_1 \ldots k'_\nu$ verschiedenen unter den Puncten $k_1\, k_2 \ldots k_{n+1}$ von denen einige schon unter den k enthalten sein können, so dass diese also doppelt zu nehmen sind, und endlich in den $3(n-\mu-\varrho-1)$ Puncte in denen $F(z^{n-\varrho-\mu-1})$ verschwindet. Also sind die den vorgegebenen verknüpften Werthepaare ertens $\mu+2\varrho+n+1-\nu$ Verzweigungswerthe, und dann noch $3(n-\varrho-\mu-1)$ Werthepaare die zu $n-\varrho-\mu-1$ Werthen von z gehören. Die Summe dieser Werthepaare ist $4n-2-\nu-\varrho-2\mu = p-1$. Nennt man die Anzahl der Werthe in denen φ verschwindet und die nicht Verzweigungswerthe sind q, so verschwindet φ ausser in den vorgegebenen Verzweigungswerthen noch in $p-1-q$ andern, und enthält $q+1$ willkürliche Constanten. Die Zahl q erreicht ihren grössten Werth, wenn $\nu = n+1$ ist, und in $\frac{1}{2}(p-1-n-1) = \frac{1}{2}(n-2)$ Puncten $\mathfrak{k}$ unendlich klein zweiter Ordnung wird. Dann ist $q = \frac{1}{2}n$, und es kann q wohl kleiner aber nicht grösser als diese Zahl sein. Aehnliches ergiebt sich wenn F Null ist, man braucht dann für φ nur die Form $\mathfrak{F}(z^{n-1})\,\mathfrak{s} + F(z^{n-1})$ zu Grunde zu legen.

§ 18. Eine Function, die in p oder weniger Puncten unendlich gross wird, ist nach Riemann der Quotient zweier Functionen φ und kann daher in der Form

$$(s\,F_1(z^{n-1}) + \mathfrak{F}_1(z^{n-1})) : (s\,F(z^{n-1}) + \mathfrak{F}(z^{n-1}))$$

oder symmetrischer in der Form

$$(\sqrt[3]{P(z)}\,F_1(z^{n-1}) + \sqrt[3]{\mathfrak{P}(z)}\,\mathfrak{F}_1(z^{n-1})) : (\sqrt[3]{P(z)}\,F(z^{n-1}) + \sqrt[3]{\mathfrak{P}(z)}\,\mathfrak{F}(z^{n-1}))$$

Digitized by Google

geschrieben werden. Wir werfen die Frage auf, ob eine einwerthige Function von s und z existirt, die in p Verzweigungspuncten, von denen keiner dreifach vorkommt, und sonst nirgend unendlich gross wird. Zu diesen Functionen müssen auch solche gerechnet werden, die in weniger als den p vorgegebenen Puncten unendlich werden, aber doch in einigen derselben und keinen anderen Puncten. Auszuschliessen aber ist die Function, die gar nicht unendlich wird, die Constante, sonst wäre die Frage von vornherein zu bejahen.

Es seien nun die Verweigungspuncte in denen die verlangte Function unendlich gross zweiter Ordnung wird, die Puncte $k_1'' k_2'', \ldots k_m'', \mathfrak{k}_1'', \mathfrak{k}_2'', \ldots \mathfrak{k}_{\mathfrak{m}}''$, und die Puncte in denen sie unendlich gross erster Ordnung wird $k_1' k_2' \ldots k_l', \mathfrak{k}_1' \mathfrak{k}_2' \ldots \mathfrak{k}_{\mathfrak{l}}'$ und es sei zuerst $l \geqq \mathfrak{l}$. Dann muss die eine dieser Zahlen, weil ihre Summe gerade ist $(2(m+\mathfrak{m}) + l+\mathfrak{l} = p = 2n)$ um mindestens 2 Einheiten von der andern verschieden sein. Es sei $l = \mathfrak{l} + \varepsilon$, $\varepsilon \geqq 2$. Dann ist nothwendig $n+1 \leqq m+\mathfrak{m}+\mathfrak{l}$. Denn es ist $m+\mathfrak{m}+\mathfrak{l} = p-m-\mathfrak{m}-\mathfrak{l}+\varepsilon$ also $2(m+\mathfrak{m}+\mathfrak{l}) = 2n+\varepsilon$ oder $m+\mathfrak{m}+\mathfrak{l} = n+\frac{1}{2}\varepsilon$. Sind nun die Puncte k in denen die Function nicht unendlich wird $k_1''' k_2''' \ldots k_{n+1-m-l}'''$ und ist $l > \mathfrak{l}$, wie schon angenommen, so ist die Function

$$\mathfrak{s} \,.\, z-k_1''' \,.\, z-k_2''' \ldots z-k_{n+1-m-l}''' \,.\, F\overset{m+\mathfrak{m}+l-n-1}{(z)} : (z-\mathfrak{k}_1'')(z-\mathfrak{k}_2'') \ldots (z-\mathfrak{k}_{\mathfrak{m}}'')$$

eine Function die in den vorgegebenen Puncten, oder wenigstens einigen von ihnen und keinen andern unendlich wird. Sie enthält $m+\mathfrak{m}+l-n$ willkürliche Constante. Ist $\mathfrak{l} > l$, so ist die Function

$$s \,.\, z-\mathfrak{k}_1''' \,.\, z-\mathfrak{k}_2''' \ldots z-\mathfrak{k}_{u+1-m-\mathfrak{l}}''' \,.\, F\overset{m+\mathfrak{m}+\mathfrak{l}-n-1}{(z)} : (z-k_1'')(z-k_2'') \ldots (z-k_{\mathfrak{m}}'').$$

wenn die Function in den Puncten $\mathfrak{k}_1''' \mathfrak{k}_2''' \mathfrak{k}_3''' \ldots$ nicht unendlich wird, die verlangte.

Ist nun ferner $l = \mathfrak{l}$, so muss die Function im Nenner des Quotienten, welcher unsere Function darstellt nach § 17 von der Form $\sqrt{\mathfrak{P}} \,.\, z-k_1'' \; z-k_2'' \ldots z-k_m'' \,.\, z-k_1' \ldots z-k_l'$ oder $\sqrt{P} \,.\, z-\mathfrak{k}_1' \ldots z-\mathfrak{k}_{\mathfrak{l}}' \,.\, z-\mathfrak{k}_1'' \ldots z-\mathfrak{k}_{\mathfrak{m}}''$ sein. Ist $m+l < n-1$ oder $\mathfrak{m}+\mathfrak{l} = m+l < n-1$, so tritt noch eine ganze Function als Factor hinzu die auch im Zähler stehen muss. Da $m+\mathfrak{l}+\mathfrak{m}+\mathfrak{l} = p$ ist, so muss entweder $m+l > n-1$ oder $\mathfrak{m}+l > n-1$ sein. Tritt beides ein, ist also $m = \mathfrak{m}$, so existirt der Nenner nicht, also die Function selbst nicht. Ist aber $m \leqq \mathfrak{m}$ so tritt einer von beiden Fällen ein, man kann sich aber wegen der Analogie der Untersuchung auf einen beschränken. Es sei $\mathfrak{m}+l \leqq n-1$. So ist also unsere Function in der Form enthalten

$$[\sqrt{P}\, F\overset{m+l}{(z)} + \sqrt{\mathfrak{P}} \,.\, \mathfrak{F}\overset{m+l}{(z)}] : [\sqrt{\mathfrak{P}} \,.\, (z-k_1'') \ldots (z-k_m'') \,.\, (z-k_1') \ldots (z-k_l')]$$

weil der Zähler den Factor $F\overset{n-1-m-l}{(z)}$, den der Nenner enthalten kann, ebenfalls besitzen muss. Der Zähler muss nun in den Puncten $k_1'' \ldots k_m'' k_1' \ldots k_l'$ verschwinden, und es muss deshalb $F\overset{m+l}{(z)} = C.z-k_1' \ldots z-k_m''$ sein. Ferner muss der Zähler in den $n+1-\mathfrak{m}-l$ Puncten $\mathfrak{k}_1'' \mathfrak{k}_2'' \ldots$ verschwinden, was, da $n+1-m-l > \mathfrak{m}$ ist, nur dann möglich ist, wenn $F\overset{m+l}{(z)}$ Null ist. Dann reducirt sich also unsere Function auf eine Constante und wir haben den Satz:

> Eine einwerthige Function von s z, die in p Verzweigungspuncten unendlich wird, von denen eine Anzahl l der Reihe k und eine gleiche Anzahl der Reihe $\mathfrak{k}$ angehören (wenn auch $l = 0$ ist) und welche in allen übrigen Verzweigungspuncten, in denen sie noch unendlich wird, unendlich gross zweiter Ordnung wird, ist nicht vorhanden, noch auch eine solche welche in nur einigen dieser Puncte unendlich würde. Nur etwa die Constante kann als eine solche Function angesehen werden.

Die Riemannsche Fläche.

§ 19. Die Riemannsche Fläche, die wie s (oder $\mathfrak{s}$) verzweigt ist, ist überall dreifach über der z-Ebene ausgebreitet. Ihre Verzweigungspuncte sind sämmtlich doppelte, um die sich die Fläche dreimal windet, also dreifach zu rechnende Puncte, die sich immer in drei Blättern zugleich befinden. Sie liegen über den Puncten $k_1, \mathfrak{k}_1, k_2, \mathfrak{k}_2, \ldots k_{n+1}, \mathfrak{k}_{n+1}$ der z-Ebene, und es ist demnach die Anzahl der einfachen Verzweigungspuncte mit $4n+4$ in Rechnung zu bringen, weil $2n+2$ doppelte vorhanden sind. Die für den Zusammenhang charakteristische Zahl ist demnach (R. p. 129)

Digitized by Google

$$p = 2n.$$

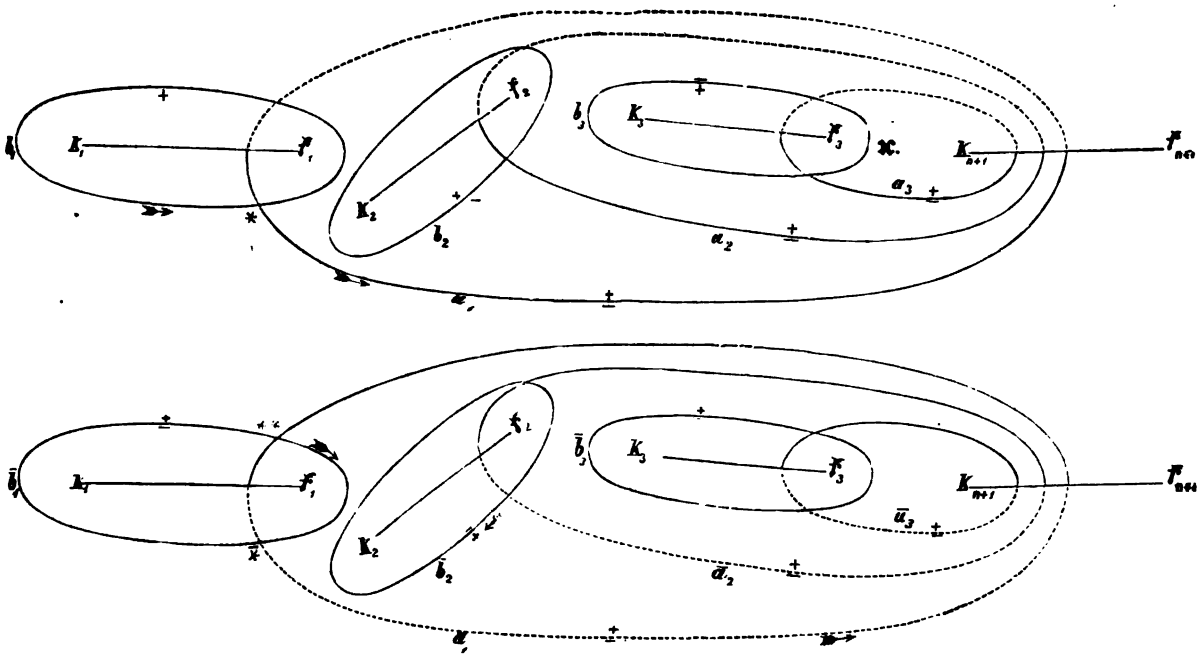
Schon im Vorhergehenden wurde zur Abkürzung p für $2n$ gesetzt.

Die Verzweigungspuncte sind durch die Bezeichnung in zwei Klassen geschieden. Die mit lateinischen Buchstaben gekennzeichneten treten im Zähler der Function s, die mit deutschen Buchstaben im Nenner von s auf. Die mit demselben Index bezeichneten Puncte k_μ und $\mathfrak{k}_\mu$ sollen ein Paar Verzweigungspuncte heissen. Führt man einen dem Werthepaare s, z entsprechenden Punct, oder kurz einen Punct s, z um den Verzweigungspunct oder Windungspunct k_μ positiv herum, d. h. so, dass k_μ immer zur Linken liegt, so geht s in τs, $\mathfrak{s}$ in $\tau^2 \mathfrak{s}$ über. Führt man aber den Punct s, z um $\mathfrak{k}_\mu$ negativ herum, so verwandelt sich ebenfalls s in τs, $\mathfrak{s}$ in $\tau^2 \mathfrak{s}$. Hieraus folgt, dass wenn man den Punct s, z in einer einfach geschlossenen sich nicht selbst schneidenden Linie (Schlinge) um ein Paar Verzweigungspuncte k_μ $\mathfrak{k}_\mu$ herumführt, s und ebenso $\mathfrak{s}$ ihren Werth nicht ändern, wofern nur in das vom Wege umschlossene Ebenenstück kein anderer Verzweigungspunct hineinfällt. Wenn man demnach k_1 mit $\mathfrak{k}_1$, k_2 mit $\mathfrak{k}_2$, etc. k_{n+1} mit $\mathfrak{k}_{n+1}$ in jedem der drei Blätter durch Linien verbindet, die sich der Einfachheit halber nicht selbst noch unter einander schneiden sollen, so jedoch, dass die in verschiedenen Blättern dasselbe Paar von Verzweigungspuncten verbindenden Linien einander decken — so wird man in jedem Blatte, für jeden Werth von z bei stetiger Fortsetzung nur einen einzigen Werth von s (und ebenso von $\mathfrak{s}$) erhalten, wenn man z über keine der gezogenen Linien, die Durchsetzungslinien heissen, hinwegführt.

Will man nun die Blätter ordnend zählen, so braucht man nur in jedem derselben einem einzelnen Werthe von z einen bestimmten der drei Werthe von s zuzuordnen. Dann ist das Blatt wegen der Stetigkeit von s in seiner ganzen Ausdehnung dadurch definirt, dass die Puncte eines Blattes immer den Werthen von s zugeordnet sind, welche durch stetige Fortsetzung auf Wegen, die über keine Durchsetzungslinie führen aus dem festgesetzten Einzelwerthe erhalten werden. Ueber die Durchsetzungslinie k_μ $\mathfrak{k}_\mu$ hinweg setzt sich ein Blatt in ein anderes, den stetigen Zusammenhang vermittelnd, fort. Wir wollen die Richtuug der Durchsetzungslinie von k_μ nach $\mathfrak{k}_\mu$ als die positive, und die für diese Richtung linke Seite als ihre positive ansehen. Setzen wir nun weiter fest, dass man durch einen Uebergang über eine Durchsetzungslinie von der negativen zur positiven Seite, z. B. durch einen positiven Umgang um einen der Puncte k, oder durch einen negativen um einen der Puncte $\mathfrak{k}$, stets aus dem ersten ins zweite, aus dem zweiten ins dritte, aus dem dritten ins erste Blatt gelangt, so ist diese Annahme mit dem stetigen Zusammenhange wohl verträglich. Beim Uebergange von der positiven zur negativen Seite ist die Reihenfolge die umgekehrte, so dass man aus dem ersten ins dritte, aus dem dritten ins zweite, aus dem zweiten ins erste Blatt gelangt. Ist dann in irgend einem Puncte $z = z_1$ der Werth von $s = s_1$ im ersten Blatte gegeben, so ist er τs_1 im zweiten $\tau^2 s_1$ im dritten Blatte. Der Werth von s im dritten Blatte ist aber gleich τmal dem Werthe im zweiten, im ersten gleich τmal dem Werthe im dritten Blatte. Nun könnte noch der Werth in irgend einem Puncte des ersten Blattes genau gegeben werden, um dieses als das erste zu kennzeichnen. Z. B. dadurch, dass für ein bestimmtes z der Werth von s im ersten Blatte den kleinsten Winkel haben solle. Hierzu liegt jedoch zunächst keine Nöthigung vor, und es soll dies deshalb nur da geschehen, wo es gerade gefordert wird.

§ 20. Die Zerschneidung der Fläche T in eine einfach zusammenhängende kann nun wie folgt geschehen. Im ersten und dritten Blatte ziehen wir die Querschnitte b_1 und $\overline{b_1}$, b_2 und $\overline{b_2}$, . . . b_n und $\overline{b_n}$, je zwei um ein Paar Verzweigungspuncte herum. Die Züge (Schlingen) b_μ und $\overline{b_\mu}$ sind einander congruent, aber ihre Richtung ist die entgegengesetzte, und b_μ liegt gänzlich im ersten, $\overline{b_\mu}$ gänzlich im dritten Blatte. (In der beigezeichneten Figur sind in der obern Zeichnung welche nur Linien im ersten und zweiten Blatte enthält, die Linien im ersten Blatte continuirlich ausgezogen, im zweiten punctirt, in der untern Zeichnung, welche nur Linien des zweiten und dritten Blattes enthält, sind die Linien im dritten Blatte ausgezogen, die im zweiten punctirt. Die Durchsetzungslinien sind in beiden Zeichnungen ausgezogen). Die beiden Querschnitte a_1 und $\overline{a_1}$ ziehen wir um die Puncte $\mathfrak{k}_1 k_{n+1}$ herum einander congruent, so dass alle Puncte $\mathfrak{k}_1$ $\mathfrak{k}_2 \ldots \mathfrak{k}_n$ im Innern der Schlinge liegen. Während a_1 im ersten Blatte an der Stelle * beginnt und in der Richtung des Pfeiles weitergezogen ist, beginnt $\overline{a_1}$ an der Stelle * im zweiten Blatte in derselben, in der Figur von einem Pfeile angedeuteten Richtung und geht über die Durchsetzungslinie k_{n+1} $\mathfrak{k}_{n+1}$ hinweg ins dritte Blatt, während a_1 über dieselbe Stelle der Durchsetzungslinie ins zweite Blatt geht. Ueber die Durchsetzungslinie

Digitized by Google



k_1 t_1 hinweg geht a_1 ins erste Blatt zurück, und an derselben Stelle geht $\overline{a_1}$ aus dem dritten ins zweite Blatt. Nun führt b_1 von der Stelle * aus vom positiven Ufer von a_1 aus auf das negative zurück, $\overline{b_1}$ von der Stelle * * aus vom positiven Ufer von $\overline{a_1}$ aus auf das negative zurück. Hieraus ergiebt sich die entgegengesetzte Richtung von b_1 und $\overline{b_1}$. Nach dieser Beschreibung der Schnitte $a_1\,\overline{a_1}$ giebt die Zeichnung hinlänglich deutlich an, wie $a_2\,\overline{a_2}$, $a_3\,\overline{a_3}$, . . . $a_n\,\overline{a_n}$ zu ziehen sind.

Durch die Systeme $a_1\,b_1$, $\overline{a_1}\,\overline{b_1}$, $a_2\,b_2$, $\overline{a_2}\,\overline{b_2}$, . . . $a_n\,b_n$, $\overline{a_n}\,\overline{b_n}$ ist nun die Fläche T in eine Fläche T' zerlegt, die allerdings noch nicht einfach zusammenhängend ist, weil ihre Begrenzung nicht aus einem Stücke besteht, sondern es sind dazu noch Linien, (die Riemann mit $c_1\,c_2$ . . . bezeichnet) nöthig, welche je ein System mit einem folgenden verbinden. Allein diese Linien können hier ohne Nachtheil fortgelassen werden, weil alle Functionen die untersucht werden, also namentlich die Integrale in T einwerthiger Functionen, aber auch gewisse dreiwerthige algebraische Functionen von s und z in der hier beschriebenen Fläche T' stetig sind, d. h. zu beiden Seiten der hier fortgelassenen Linien ($c_1\,c_2$ . . .) gleich sind.

Die überall endlichen Integrale.

§ 21. Jedes überall endliche Integral kann aus den $2n = p$ speciellen

$$w_\mu(s, z) = \int \frac{z^{\mu-1}\,dz}{s \,.\, \mathfrak{P}(z)}, \quad \mathfrak{w}_\mu(s, z) = \int \frac{z^{\mu-1}\,dz}{s \,.\, P(z)}, \quad \mu \leqq n$$

linear mit constanten Coefficienten zusammengesetzt werden, so dass das allgemeine Integral geschrieben werden kann*)

$$w = \sum_1^n{}_{(\nu)} (A_\nu w_\nu + \mathfrak{A}_\nu \mathfrak{w}_\nu)$$

wenn die A und $\mathfrak{A}$ willkürliche Constante sind.

---

*) Um bei einer Summation die Kennzeichnung des Summationsbuchstabens oder beim Productbilden die des Productbuchstabens, die in obiger Gleichung noch geschehen ist, fortlassen zu können, soll dabei, wenn es nicht besonders anders bemerkt wird, immer der Buchstabe ν oder ν', ν'' etc. als ganzzahlige Veränderliche angewendet werden.

Digitized by Google

§ 22. Die Periodicitätsmoduln der Functionen w_μ oder $\mathfrak{w}_\mu$ an einem Schnitt a_μ oder b_μ hängen nahe zusammen mit den Periodicitätsmoduln an den entsprechenden Schnitten $\bar{a}_\mu$ oder $\bar{b}_\mu$. Wir bezeichnen die Periodicitätsmoduln so, dass w_μ auf dem positiven Ufer von $a_{\mu'}$ um $A_{\mu\mu'}$ grösser ist, als auf dem negativen, auf dem positiven Ufer von $b_{\mu'}$ um $B_{\mu\mu'}$ grösser als auf dem negativen. Die entsprechenden Grössen bei $\bar{a}_{\mu'}$ $\bar{b}_{\mu'}$ aber sollen $\bar{A}_{\mu\mu'}$ $\bar{B}_{\mu\mu'}$ sein. Die Periodicitätsmoduln von $\mathfrak{w}_{\mu'}$ bei $a_{\mu'}$ $b_{\mu'}$ $\bar{a}_{\mu'}$ $\bar{b}_{\mu'}$ sollen bez. mit $\mathfrak{A}_{\mu\mu'}$ $\mathfrak{B}_{\mu\mu'}$ $\bar{\mathfrak{A}}_{\mu\mu'}$ $\bar{\mathfrak{B}}_{\mu\mu'}$ bezeichnet werden. Nun ist, wenn der Integrationsweg, der allemal in positiver Richtung der angemerkten Linie zu nehmen ist, wie eine untere Grenze an das Integral gehängt wird

$$\int_{b_{\mu'}} dw_\mu = -\tau \int_{b_\mu} dw_\mu, \quad \int_{\bar{a}_{\mu'}} dw_\mu = \tau^2 \int_{a_{\mu'}} dw_\mu,$$

$$\int_{b_{\mu'}} d\mathfrak{w}_\mu = -\tau \int_{\bar{b}_{\mu'}} d\mathfrak{w}_\mu, \quad \int_{a_{\mu'}} d\mathfrak{w}_\mu = \tau^2 \int_{\bar{a}_{\mu'}} d\mathfrak{w}_\mu,$$

woraus folgt:

$$\bar{A}_{\mu\mu'} = -\tau A_{\mu\mu'}, \quad \mathfrak{A}_{\mu\mu'} = -\tau \bar{\mathfrak{A}}_{\mu\mu'}, \quad \bar{B}_{\mu\mu'} = \tau^2 B_{\mu\mu'}, \quad \mathfrak{B}_{\mu\mu'} = \tau^2 \bar{\mathfrak{B}}_{\mu\mu'}.$$

§ 23. Aus diesen Elementarintegralen setzen wir zunächst Integrale zusammen, welche, weil sie zwischen den Elementarintegralen w, $\mathfrak{w}$ und den nachher zu bildenden Normalintegralen u und $\mathfrak{u}$ in gewisser Beziehung in der Mitte stehen, Zwischenintegrale heissen mögen. Diese sollen an $n-1$ Querschnitten a und $n-1$ Schnitten $\bar{a}$ den Periodicitätsmodul Null haben, und nur an a_μ und $\bar{a}_\mu$ einen rein imaginären. Wir bilden nämlich, indem wir mit δ eine formale Differentiation anzeigen, die Functionen

$$x_\mu(s,z) = x_\mu = i\pi \sum_1^n \frac{\delta \lg |A|}{\delta A_{\nu\mu}} w_\nu, \quad \mathfrak{x}_\mu(s,z) = \mathfrak{x}_\mu = i\pi \sum_1^n \frac{\delta \lg |\bar{\mathfrak{A}}|}{\delta \bar{\mathfrak{A}}_{\nu\mu}} \mathfrak{w}_\nu,$$

worin $|A|$ für $|A_{\lambda\lambda'}|$ und $|\bar{\mathfrak{A}}|$ kurz für $|\bar{\mathfrak{A}}_{\lambda\lambda'}|$ gesetzt ist. (Man vergleiche die Einleitung.) Der Periodicitätsmodul von x_μ bei $a_{\mu'}$ und $\bar{a}_{\mu'}$ ist Null, wenn $\mu \gtrless \mu'$ ist, bei a_μ aber $i\pi$, bei $\bar{a}_\mu$ ist er $-\tau i\pi$. Der Periodicitätsmodul von $\mathfrak{x}_\mu$ bei $a_{\mu'}$ oder $\bar{a}_{\mu'}$ ist ebenfalls Null, wenn $\mu \gtrless \mu'$ ist, bei a_μ aber ist er $-\tau i\pi$, und $i\pi$ bei $\bar{a}_\mu$. Die übrigen Periodicitätsmoduln sollen so bezeichnet werden, dass x_μ bei $b_{\mu'}$, $\bar{b}_{\mu'}$ bez. die Moduln $x_{\mu\mu'}$, $\bar{x}_{\mu\mu'}$, $\mathfrak{x}_\mu$ aber bez. die Periodicitätsmoduln $\mathfrak{x}_{\mu\mu'}$, $\bar{\mathfrak{x}}_{\mu\mu'}$ hat. Dann ist offenbar

$$\bar{x}_{\mu\mu'} = \tau^2 x_{\mu\mu'}, \quad |\bar{x}_{\lambda\lambda'}| = \tau^{2n} |x_{\lambda\lambda'}|, \quad \mathfrak{x}_{\mu\mu'} = \tau^2 \bar{\mathfrak{x}}_{\mu\mu'}, \quad |\bar{\mathfrak{x}}_{\lambda\lambda'}| = \tau^n |\mathfrak{x}_{\lambda\lambda'}|.$$

Wendet man die allgemeinen Relationen, welche zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung bestehen (R. pag. 147) auf die x und $\mathfrak{x}$ an, so folgt:

$$i\pi(x_{\mu'\mu} - x_{\mu\mu'}) + \tau i\pi(\bar{x}_{\mu\mu'} - \bar{x}_{\mu'\mu}) = 0$$

oder

$$i\pi(x_{\mu'\mu} - \tau^3 x_{\mu'\mu} - x_{\mu\mu'} + \tau^3 x_{\mu\mu'}) = 0$$

welche Gleichung von selbst sich als richtig erweist. Ferner ist aber

$$i\pi(\mathfrak{x}_{\mu'\mu} - x_{\mu\mu'}) - \tau i\pi(\bar{\mathfrak{x}}_{\mu'\mu} - x_{\mu\mu'}) = 0$$

oder

$$\mathfrak{x}_{\mu'\mu} - \tau\bar{\mathfrak{x}}_{\mu'\mu} = \bar{x}_{\mu\mu'} - \tau x_{\mu\mu'}, \quad \mathfrak{x}_{\mu'\mu}(1-\tau^2) = -\tau(1-\tau)x_{\mu\mu'}$$

$$\mathfrak{x}_{\mu'\mu} = -\frac{\tau}{1+\tau} x_{\mu\mu'} = \tau^2 x_{\mu\mu'}, \quad \bar{\mathfrak{x}}_{\mu'\mu} = x_{\mu\mu'} = \tau\bar{x}_{\mu\mu'}$$

$$|\mathfrak{x}_{\lambda\lambda'}| = \tau^{2n} |x_{\lambda\lambda'}|, \quad |\bar{\mathfrak{x}}_{\lambda\lambda'}| = |x_{\lambda\lambda'}| = \tau^n |\bar{x}_{\lambda\lambda'}|.$$

Für die Functionen φ im Zähler von $\frac{\partial x}{\partial z}$, $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z}$ führen wir Abkürzungen ein, indem wir setzen

$$\sum_1^n \frac{\delta \lg |A|}{\delta A_{\nu\mu}} z^{\nu-1} = f_\mu(z), \quad \sum_1^n \frac{\delta \lg |\bar{\mathfrak{A}}|}{\delta \bar{\mathfrak{A}}_{\nu\mu}} z^{\nu-1} = \mathfrak{f}_\mu(z),$$

so dass also zu schreiben ist

Digitized by Google

$$x_\mu = i\pi \int \frac{f_\mu(z)\,dz}{s\,\mathfrak{P}(z)}, \quad \mathfrak{x}_\mu = i\pi \int \frac{\mathfrak{f}_\mu(z)\,dz}{\mathfrak{s}\,P(z)}.$$

ist.

§ 24. Aus den Functionen x und $\mathfrak{x}$ bilden wir die Normalintegrale u und $\mathfrak{u}$ durch die Gleichungen

$$u_\mu(s, z) = u_\mu = \frac{x_\mu + \tau\mathfrak{x}_\mu}{1-\tau^2}, \quad \mathfrak{u}_\mu(s, z) = \mathfrak{u}_\mu = \frac{\tau x_\mu + \mathfrak{x}_\mu}{1-\tau^2},$$

woraus folgt

$$x_\mu = u_\mu - \tau\mathfrak{u}_\mu, \quad \mathfrak{x}_\mu = -\tau u_\mu + \mathfrak{u}_\mu, \quad x_\mu + \mathfrak{x}_\mu = (u_\mu + \mathfrak{u}_\mu)(1-\tau).$$

Dann hat

u_μ bei allen a und $\overline{a}$ den Periodicitätsmodul 0 nur bei a_μ den $i\pi$,
$\mathfrak{u}_\mu$ bei allen a und $\overline{a}$ den Periodicitätsmodul 0 nur bei $\bar{a}_\mu$ den $i\pi$.

Die übrigen Periodicitätsmoduln an den Schnitten b und $\overline{b}$ sollen so bezeichnet werden, dass

u_μ bei $b_{\mu'}$ den Periodicitätsmodul $a_{\mu\mu'}$ bei $\overline{b}_{\mu'}$ den Modul $\overline{a}_{\mu\mu'}$,
$\mathfrak{u}_\mu$ bei $b_{\mu'}$ den Periodicitätsmodul $\mathfrak{a}_{\mu\mu'}$ bei $\overline{b}_{\mu'}$ den Modul $\overline{\mathfrak{a}}_{\mu\mu'}$

hat. Aus den im vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen $\overline{x}_{\mu\mu'} = \tau^2 x_{\mu\mu'}$, $\overline{\mathfrak{x}}_{\mu\mu'} = \tau\mathfrak{x}_{\mu\mu'}$ folgt demnach

$$\overline{a}_{\mu\mu'} - \tau\overline{\mathfrak{a}}_{\mu\mu'} = \tau^2 a_{\mu\mu'} - \mathfrak{a}_{\mu\mu'},$$
$$-\tau\overline{a}_{\mu\mu'} + \overline{\mathfrak{a}}_{\mu\mu'} = -\tau^2 a_{\mu\mu'} + \tau\mathfrak{a}_{\mu\mu'}.$$

§ 25. Löst man diese Gleichungen nach $\overline{a}_{\mu\mu'}$ und $\overline{\mathfrak{a}}_{\mu\mu'}$ auf, so erhält man

$$\overline{a}_{\mu\mu'} = -a_{\mu\mu'} - \mathfrak{a}_{\mu\mu'}, \quad \overline{\mathfrak{a}}_{\mu\mu'} = a_{\mu\mu'}, \quad \mathfrak{a}_{\mu\mu'} = -\overline{a}_{\mu\mu'} - \overline{\mathfrak{a}}_{\mu\mu'}.$$

Hierzu kann man noch die Relationen fügen, welche aus einer bekannten Eigenschaft der Integrale erster Gattung (R. pag. 144) fliessen,

$$a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}, \quad \overline{\mathfrak{a}}_{\mu\mu'} = \overline{\mathfrak{a}}_{\mu'\mu}, \quad \overline{a}_{\mu\mu'} = \mathfrak{a}_{\mu'\mu}.$$

Wenn man diese mit den vorhergehenden combinirt, so findet man noch

$$\mathfrak{a}_{\mu\mu'} + \mathfrak{a}_{\mu'\mu} = -a_{\mu\mu'} = -\overline{\mathfrak{a}}_{\mu\mu'} = \overline{a}_{\mu\mu'} + \overline{\mathfrak{a}}_{\mu'\mu},$$
$$2\mathfrak{a}_{\mu\mu} = -a_{\mu\mu} = 2\overline{a}_{\mu\mu};$$

endlich ist

$$a_{\mu\mu'} = (x_{\mu\mu'} + x_{\mu'\mu}) : (1-\tau^2), \quad \mathfrak{a}_{\mu\mu'} = (\tau x_{\mu\mu'} + \tau^2 x_{\mu'\mu}) : (1-\tau^2).$$

§ 26. *Werthe der Integrale u und $\mathfrak{u}$ in den Verzweigungspuncten.* Die Werthe der Integrale u und $\mathfrak{u}$ hängen noch von einer willkürlichen Constanten ab, von dem Werthe in einem beliebigen Puncte. Deshalb wollen wir zuerst nur die Differenzen der Werthe eines Integrals in den Verzweigungspuncten untersuchen, und beginnen mit den Integralen x_μ $\mathfrak{x}_\mu$. Die Differenz $x_\mu(\mathfrak{k}_{\mu'}) - x_\mu(k_{\mu'})$ (in leicht verständlicher Bezeichnung) ist Null, wenn $\mu' \gtrless \mu$ und $\mu' < n+1$ ist. Denn der Periodicitätsmodul von x_μ bei $a_{\mu'}$, oder was dasselbe ist, das über $b_{\mu'}$ genommmene Integral

$$\int_{b_{\mu'}} dx_\mu \quad \text{ist gleich} \quad \int_{k_{\mu'}}^{\mathfrak{k}_{\mu'}} (\tau-1)\,dx_\mu,$$

wenn das letzte Integral im ersten Blatte über das positive Ufer der Durchsetzungslinie $k_{\mu'}$ $\mathfrak{k}_{\mu'}$ erstreckt wird. Also ist $\int_{k_{\mu'}}^{\mathfrak{k}_{\mu'}} dx_\mu = 0$. Ebenso ist $\int_{k_{\mu'}}^{\mathfrak{k}_{\mu'}} d\mathfrak{x}_\mu = 0$ und also $\mathfrak{x}_\mu(\mathfrak{k}_{\mu'}) - \mathfrak{x}_\mu(k_{\mu'}) = 0$. Hingegen ist

$$\int_{b_\mu} dx_\mu = -i\pi, \quad \int_{b_\mu} d\mathfrak{x}_\mu = \tau i\pi$$

und demnach

$$\{x_\mu(\mathfrak{k}_\mu) - x_\mu(k_\mu)\} \cdot \{1-\tau^2\} = i\pi,$$
$$x_\mu(\mathfrak{k}_\mu) - x_\mu(k_\mu) = i\pi : (1-\tau^2) = i\pi(1-\tau) : 2(1-\cos\tfrac{2}{3}\pi) = \tfrac{1}{3} i\pi(1-\tau),$$
$$\{\mathfrak{x}_\mu(\mathfrak{k}_\mu) - \mathfrak{x}_\mu(k_\mu)\} \{1-\tau\} = -i\pi\tau,$$
$$\mathfrak{x}_\mu(\mathfrak{k}_\mu) - \mathfrak{x}_\mu(k_\mu) = -i\pi\tau : (1-\tau) = -i\pi\tau(1-\tau^2) : 2(1-\cos\tfrac{2}{3}\pi) = \tfrac{1}{3} i\pi(1-\tau).$$

Digitized by Google

Hieraus ergiebt sich

$$u_\mu(\mathfrak{k}_{\mu'}) = u_\mu(k_{\mu'}),\quad \mathfrak{u}_\mu(\mathfrak{k}_{\mu'}) = \mathfrak{u}_\mu(k_{\mu'})\ \mu' \gtrless \mu,\ \mu' < n+1,$$

$$u_\mu(\mathfrak{k}_\mu) - u_\mu(k_\mu) = \{x_\mu(\mathfrak{k}_\mu) - x_\mu(k_\mu) + \tau\mathfrak{x}_\mu(\mathfrak{k}_\mu) - \tau\mathfrak{x}_\mu(k_\mu)\} : (1-\tau^2)$$
$$= \tfrac{1}{3}i\pi(1-\tau+\tau-\tau^2) : (1-\tau^2) = \tfrac{1}{3}i\pi,$$

$$\mathfrak{u}_\mu(\mathfrak{k}_\mu) - \mathfrak{u}_\mu(k_\mu) = \{\tau x_\mu(\mathfrak{k}_\mu) - \tau x_\mu(k_\mu) + \mathfrak{x}_\mu(\mathfrak{k}_\mu) - \mathfrak{x}_\mu(k_\mu)\} : (1-\tau^2) = \tfrac{1}{3}i\pi.$$

Eine ähnliche Betrachtung ergiebt noch,

$$u_\mu(\mathfrak{k}_{n+1}) - u_\mu(k_{n+1}) = -\tfrac{1}{3}i\pi,\quad \mathfrak{u}_\mu(\mathfrak{k}_{n+1}) - \mathfrak{u}_\mu(k_{n+1}) = -\tfrac{1}{3}i\pi.$$

Die Differenzen $x_\mu(k_{\mu'+1}) - x_\mu(\mathfrak{k}_{\mu'})$, $\mathfrak{x}_\mu(k_{\mu'+1}) - \mathfrak{x}_\mu(\mathfrak{k}_{\mu'})$ ergeben sich aus den Gleichungen

$$\{x_\mu(k_{\mu'+1}) - x_\mu(\mathfrak{k}_{\mu'})\}(1-\tau) = x_{\mu,\mu'+1} - x_{\mu\mu'},$$
$$\{\mathfrak{x}_\mu(k_{\mu'+1}) - \mathfrak{x}_\mu(\mathfrak{k}_{\mu'})\}(1-\tau^2 = \mathfrak{x}_{\mu,\mu'+1} - \mathfrak{x}_{\mu\mu'},$$

oder

$$x_\mu(k_{\mu'+1}) - x_\mu(\mathfrak{k}_{\mu'}) = \tfrac{1}{3}(1-\tau^2)(x_{\mu\mu'+1} - x_{\mu\mu'}) = \tfrac{1}{3}(\bar{x}_{\mu\mu'} - \bar{x}_{\mu\mu'+1})(1-\tau),$$
$$\mathfrak{x}_\mu(k_{\mu'+1}) - \mathfrak{x}_\mu(\mathfrak{k}_{\mu'}) = \tfrac{1}{3}(1-\tau)(\mathfrak{x}_{\mu\mu'+1} - \mathfrak{x}_{\mu\mu'}) = \tfrac{1}{3}(\bar{\mathfrak{x}}_{\mu\mu'} - \bar{\mathfrak{x}}_{\mu\mu'+1})(1-\tau^2).$$

Hieraus folgt nun

$$u_\mu(k_{\mu'+1}) - u_\mu(\mathfrak{k}_{\mu'}) = \tfrac{1}{3}\{(x_{\mu\mu'+1} - x_{\mu\mu'})(1-\tau^2) + (\mathfrak{x}_{\mu\mu'+1} - \mathfrak{x}_{\mu\mu'})(\tau-\tau^2)\} : (1-\tau^2)$$
$$= \tfrac{1}{3}\{x_{\mu\mu'+1} - x_{\mu\mu'} + \tau(\mathfrak{x}_{\mu\mu'+1} - \mathfrak{x}_{\mu\mu'}) - \tau^2(x_{\mu\mu'+1} + \mathfrak{x}_{\mu\mu'+1} - x_{\mu\mu'} - \mathfrak{x}_{\mu\mu'})\} : (1-\tau^2)$$
$$= -\tfrac{1}{3}(a_{\mu\mu'} - a_{\mu\mu'+1}) + \tfrac{1}{3}(\bar{a}_{\mu\mu'} - \bar{a}_{\mu\mu'+1}),$$

$$\mathfrak{u}_\mu(k_{\mu'+1}) - \mathfrak{u}_\mu(\mathfrak{k}_{\mu'}) = -\tfrac{1}{3}\{(x_{\mu\mu'+1} - x_{\mu\mu'})(\tau-\tau^2) - (\bar{\mathfrak{x}}_{\mu\mu'+1} - \mathfrak{x}_{\mu\mu'})(1-\tau^2)\} : (1-\tau^2)$$
$$= -\tfrac{1}{3}(\mathfrak{a}_{\mu\mu'} - \mathfrak{a}_{\mu\mu'+1}) + \tfrac{1}{3}(\bar{\mathfrak{a}}_{\mu\mu'} - \bar{\mathfrak{a}}_{\mu\mu'+1}).$$

§ 27. Die in den Integralen u und $\mathfrak{u}$ enthaltenen additiven Constanten werden später nach Riemann's Regeln bestimmt. Vorläufig geben wir denselben die Form $\frac{1}{p-1}K_\mu$, $\frac{1}{p-1}\mathfrak{K}_\mu$ und nehmen an, dass

$$u_\mu(\mathfrak{k}_{n+1}) = \frac{1}{p-1}K_\mu,\quad \mathfrak{u}_\mu(\mathfrak{k}_{n+1}) = \frac{1}{p-1}\mathfrak{K}_\mu$$

sei. Dann construirt man mittels der eben gegebenen Formeln leicht die beiden auf Seite 14 und 15 unter dem Text stehenden Tabellen, in welchen eine beliebig unter und hinter dem Strich herausgegriffene Grösse

	$u_1 - \frac{1}{p-1}K_1$,	$u_2 - \frac{1}{p-1}K_2$,	$\ldots u_\mu - \frac{1}{p-1}K_\mu$,	$\ldots u_n - \frac{1}{p-1}K_n$
k_1	$\frac{1}{3}(a_{11} - \bar{a}_{11})$,	$\frac{1}{3}(a_{21} - \bar{a}_{21})$,	$\ldots \frac{1}{3}(a_{\mu 1} - \bar{a}_{\mu 1})$,	$\ldots \frac{1}{3}(a_{n1} - \bar{a}_{n1})$,
$\mathfrak{k}_1$	$\frac{1}{3}(a_{11} - \bar{a}_{11}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\frac{1}{3}(a_{21} - \bar{a}_{21})$,	$\ldots \frac{1}{3}(a_{\mu 1} - \bar{a}_{\mu 1})$,	$\ldots \frac{1}{3}(a_{n1} - \bar{a}_{n1})$,
k_2	$\frac{1}{3}(a_{12} - \bar{a}_{12}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\frac{1}{3}(a_{22} - \bar{a}_{22})$,	$\ldots \frac{1}{3}(a_{\mu 2} - \bar{a}_{\mu 2})$,	$\ldots \frac{1}{3}(a_{n2} - \bar{a}_{n2})$,
$\mathfrak{k}_2$	$\frac{1}{3}(a_{12} - \bar{a}_{12}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\frac{1}{3}(a_{22} - \bar{a}_{22}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots \frac{1}{3}(a_{\mu 2} - \bar{a}_{\mu 2})$,	$\ldots \frac{1}{3}(a_{n2} - \bar{a}_{n2})$,
k_3	$\frac{1}{3}(a_{13} - \bar{a}_{13}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\frac{1}{3}(a_{23} - \bar{a}_{23}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots \frac{1}{3}(a_{\mu 3} - \bar{a}_{\mu 3})$,	$\ldots \frac{1}{3}(a_{n3} - \bar{a}_{n3})$,
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k_μ	$\frac{1}{3}(a_{1\mu} - \bar{a}_{1\mu}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\frac{1}{3}(a_{2\mu} - \bar{a}_{2\mu}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots \frac{1}{3}(a_{\mu\mu} - \bar{a}_{\mu\mu})$,	$\ldots \frac{1}{3}(a_{n\mu} - \bar{a}_{n\mu})$,
$\mathfrak{k}_\mu$	$\frac{1}{3}(a_{1\mu} - \bar{a}_{1\mu}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\frac{1}{3}(a_{2\mu} - \bar{a}_{2\mu}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots \frac{1}{3}(a_{\mu\mu} - \bar{a}_{\mu\mu}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots \frac{1}{3}(a_{n\mu} - \bar{a}_{n\mu})$,
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k_n	$\frac{1}{3}(a_{1n} - \bar{a}_{1n}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\frac{1}{3}(a_{2n} - \bar{a}_{2n}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots \frac{1}{3}(a_{\mu n} - \bar{a}_{\mu n}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots \frac{1}{3}(a_{nn} - \bar{a}_{nn})$,
$\mathfrak{k}_n$	$\frac{1}{3}(a_{1n} - \bar{a}_{1n}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\frac{1}{3}(a_{2n} - \bar{a}_{2n}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots \frac{1}{3}(a_{\mu n} - \bar{a}_{\mu n}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots \frac{1}{3}(a_{nn} - \bar{a}_{nn}) + \frac{1}{3}i\pi$,
k_{n+1}	$\frac{1}{3}i\pi$,	$\frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots \frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots \frac{1}{3}i\pi$,
$\mathfrak{k}_{n+1}$	0,	0,	$\ldots$ 0,	$\ldots$ 0,

Digitized by Google

den Werth der Function angiebt, mit welcher die Vertikalreihe überschrieben ist, in der sie steht, und zwar in dem Verzweigungspuncte, welcher der Horizontalreihe nebengeschrieben ist, in der sie steht.

§ 28. *Die Grössen K und* $\mathfrak{K}$. Riemann bestimmt (R. p. 148) die Anfangswerthe der Integrale u und $\mathfrak{u}$ so, dass die Summe ihrer Werthe für $2p-2$ durch eine Gleichung $\varphi=0$ verknüpfte Puncte nach einem System ganzer gleichzeitiger Periodicitätsmoduln congruent Null ist. Nehmen wir als Puncte die auf solche Weise mit einander verknüpft sind die Wurzeln der Gleichung

$$s \,.\, z - z_1 \,.\, z - z_2 \,.\,.\,. \, z - z_{n-1} = 0,$$

so bestehen dieselben aus den Puncten $k_1, k_2, \ldots k_{n+1}$ und (s_1, z_1), $(s_1\,\tau, z_1)$, $(s_1\,\tau^2, z_1)$, $\ldots$ (s_{n-1}, z_{n-1}), $(s_{n-1}\,\tau, z_{n-1})$ $(s_{n-1}\,\tau^2, z_{n-1})$, die zu je dreien über den Puncten $z_1\, z_2 \ldots z_{n-1}$ der z-Ebene liegen. Nun wollen wir ein System von Grössen $(C_1, C_2 \ldots C_n;\ \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_n)$ hinfort kurz mit $(C_\lambda;\ \mathfrak{C}_\lambda)$ bezeichnen, so dass der Buchstabe λ in dieser Form ein System von n-Werthen $1, 2 \ldots n$ der Reihe nach vertritt. Dann ist (nach R. pag. 138) das System

$$(u_\lambda(s_1, z_1) + u_\lambda(s_1\,\tau, z_1) + u_\lambda(s_1\,\tau^2, \lambda);\quad \mathfrak{u}_\lambda(s_1, z_1) + \mathfrak{u}_\lambda(s_1\,\tau, z_1) + \mathfrak{u}_\lambda(s_1\,\tau^2, z_1))$$

für sich einem constanten d. h. von z_1 unabhängigen Werthsysteme nach dem vollständigen Systeme gleichzeitiger Periodicitätsmoduln congruent. Wirft man z_1 auf einen Verzweigungspunct, so sieht man sofort, dass dieses System von Constanten gleich $\left(\frac{3}{p-1} K_\lambda;\ \frac{3}{p-1}\mathfrak{K}_\lambda\right)$ ist. Das Werthsystem

$$\left(\sum_1^{n+1} u_\lambda(k_\nu);\ \sum_1^{n+1} \mathfrak{u}_\lambda(k_\nu)\right) = \left(\sum_1^{n+1}{}_\nu\, u_\lambda(\mathfrak{k}_\lambda);\ \sum_1^{n+1} \mathfrak{u}_\lambda(\mathfrak{k}_\nu)\right)$$

kann den Tabellen auf Seite 14 und 15 entnommen werden. Es ist nämlich

$$\left(\sum_1^{n+1} u_\lambda(k_\nu),\ \sum_1^{n+1} \mathfrak{u}_\lambda(k_\nu)\right) =$$

$$\left(\tfrac{1}{3}\sum_1^{n}(a_{\lambda\nu} - \bar{a}_{\lambda\nu}) + \tfrac{1}{3}(n+1-\lambda)i\pi + \frac{n+1}{p-1} K_\lambda,\ \tfrac{1}{3}\sum_1^{n}(\mathfrak{a}_{\lambda\nu} - \bar{\mathfrak{a}}_{\lambda\nu}) + \tfrac{1}{3}(n+1-\lambda)i\pi + \frac{n+1}{p-1}\mathfrak{K}_\lambda\right).$$

Zur Abkürzung soll noch

$$(L_\lambda;\ \mathfrak{L}_\lambda) = \left(\sum_1^{n}(a_{\lambda\nu} - \bar{a}_{\lambda\nu}) + (n+1-\lambda)i\pi;\ \sum_1^{n}(\mathfrak{a}_{\lambda\nu} - \bar{\mathfrak{a}}_{\lambda\nu}) + (n+1-\lambda)i\pi\right)$$

	$\mathfrak{u}_1 - \frac{1}{p-1}\mathfrak{K}_1$,	$\mathfrak{u}_2 - \frac{1}{p-1}\mathfrak{K}_2$,	$\ldots\ \mathfrak{u}_\mu - \frac{1}{p-1}\mathfrak{K}_\mu$,	$\ldots\ \mathfrak{u}_n - \frac{1}{p-1}\mathfrak{K}_n$
k_1	$\frac{1}{3}(a_{11} - \bar{a}_{11})$,	$\frac{1}{3}(a_{21} - \bar{a}_{21})$,	$\ldots\ \frac{1}{3}(a_{\mu 1} - \bar{a}_{\mu 1})$,	$\ldots\ \frac{1}{3}(a_{n1} - \bar{a}_{n1})$,
$\mathfrak{k}_1$	$\frac{1}{3}(a_{11} - \bar{a}_{11}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\frac{1}{3}(a_{21} - \bar{a}_{21})$,	$\ldots\ \frac{1}{3}(a_{\mu 1} - \bar{a}_{\mu 1})$,	$\ldots\ \frac{1}{3}(a_{n1} - \bar{a}_{n1})$,
k_2	$\frac{1}{3}(a_{12} - \bar{a}_{12}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\frac{1}{3}(a_{22} - \bar{a}_{22})$,	$\ldots\ \frac{1}{3}(a_{\mu 2} - \bar{a}_{\mu 2})$,	$\ldots\ \frac{1}{3}(a_{n2} - \bar{a}_{n2})$,
$\mathfrak{k}_2$	$\frac{1}{3}(a_{12} - \bar{a}_{12}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\frac{1}{3}(a_{22} - \bar{a}_{22}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots\ \frac{1}{3}(a_{\mu 2} - \bar{a}_{\mu 2})$,	$\ldots\ \frac{1}{3}(a_{n2} - \bar{a}_{n2})$,
k_3	$\frac{1}{3}(a_{13} - \bar{a}_{13}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\frac{1}{3}(a_{23} - \bar{a}_{23}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots\ \frac{1}{3}(a_{\mu 3} - \bar{a}_{\mu 3})$,	$\ldots\ \frac{1}{3}(a_{n3} - \bar{a}_{n3})$,
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots\ \vdots$	$\ldots\ \vdots$
k_μ	$\frac{1}{3}(a_{1\mu} - \bar{a}_{1\mu}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\frac{1}{3}(a_{2\mu} - \bar{a}_{2\mu}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots\ \frac{1}{3}(a_{\mu\mu} - \bar{a}_{\mu\mu})$,	$\ldots\ \frac{1}{3}(a_{n\mu} - \bar{a}_{n\mu})$,
$\mathfrak{k}_\mu$	$\frac{1}{3}(a_{1\mu} - \bar{a}_{1\mu}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\frac{1}{3}(a_{2\mu} - \bar{a}_{2\mu}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots\ \frac{1}{3}(a_{\mu\mu} - \bar{a}_{\mu\mu}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots\ \frac{1}{3}(a_{n\mu} - \bar{a}_{n\mu})$,
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots\ \vdots$	$\ldots\ \vdots$
k_n	$\frac{1}{3}(a_{1n} - \bar{a}_{1n}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\frac{1}{3}(a_{2n} - \bar{a}_{2n}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots\ \frac{1}{3}(a_{\mu n} - \bar{a}_{\mu n}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots\ \frac{1}{3}(a_{nn} - \bar{a}_{nn})$,
$\mathfrak{k}_n$	$\frac{1}{3}(a_{1n} - \bar{a}_{1n}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\frac{1}{3}(a_{2n} - \bar{a}_{2n}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots\ \frac{1}{3}(a_{\mu n} - \bar{a}_{\mu n}) + \frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots\ \frac{1}{3}(a_{nn} - \bar{a}_{nn}) + \frac{1}{3}i\pi$,
k_{n+1}	$\frac{1}{3}i\pi$,	$\frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots\ \frac{1}{3}i\pi$,	$\ldots\ \frac{1}{3}i\pi$,
$\mathfrak{k}_{n+1}$	0,	0,	$\ldots$ 0,	$\ldots$ 0,

Digitized by Google

gesetzt werden. Dann ist

$$\left(\sum_1^{n+1} u_\lambda(k_\nu);\ \sum_1^{n+1} \mathfrak{u}_\lambda(k_\nu)\right) = \left(\sum_1^{n+1} u_\lambda(\mathfrak{k}_\nu);\ \sum_1^{n+1} \mathfrak{u}_\lambda(\mathfrak{k}_\nu)\right) = \left(\tfrac{1}{3} L_\lambda + \frac{n+1}{p-1} K_\lambda;\ \tfrac{1}{3} L + \frac{n+1}{p-1} \mathfrak{K}_\lambda\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\left(\sum_1^{n+1} u_\lambda(k_\nu) + \sum_1^{n+1} [u_\lambda(s_\nu, z_\nu) + u_\lambda(s_\nu \tau, z_\nu) + u_\lambda(s_\nu \tau^2, z_\nu)];\right. \\ \left.\sum_1^{n+1} \mathfrak{u}_\lambda(k_\nu) + \sum_1^{n+1} [\mathfrak{u}_\lambda(s_\nu, z_\nu) + \mathfrak{u}_\lambda(s_\nu \tau, z_\nu) + \mathfrak{u}_\lambda(s_\nu \tau^2, z_\nu)]\right)\end{array}\right\} = (2K_\lambda + \tfrac{1}{3} L_\lambda;\ \ 2\mathfrak{K}_\lambda + \tfrac{1}{3}\mathfrak{L}_\lambda) \equiv (0;\ 0).$$

Aus dieser Congruenz geht hervor, dass, wenn wir

$$(K_\lambda;\ \mathfrak{K}_\lambda) = (\tfrac{1}{2} M - \tfrac{1}{6} L_\lambda;\ \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_\lambda - \tfrac{1}{6}\mathfrak{L})$$

setzen, $(M_\lambda;\ \mathfrak{M}_\lambda)$ ein vollständiges System ganzer gleichzeitiger Periodicitätsmoduln ist, deren Zahlencoefficienten erst mit Hilfe der ϑ-Functionen näher bestimmt werden können.

§ 29. Nun wollen wir einige Systeme von Summen der Werthe der Functionen u und $\mathfrak{u}$ in Verzweigungspuncten mittels der Tabellen auf Seite 14 und 15 in den eingeführten und in noch einzuführenden Bezeichnungen ausdrücken. Zuerst ist

$$\left(u_\lambda(\mathfrak{k}_{n+1}) - 2\sum_1^n u_\lambda(\mathfrak{k}_\nu);\ \ \mathfrak{u}_\lambda(\mathfrak{k}_{n+1}) - 2\sum_1^n \mathfrak{u}_\lambda(\mathfrak{k}_\nu)\right) =$$

$$(-K_\lambda - \tfrac{2}{3} L_\lambda;\ -\mathfrak{K}_\lambda - \tfrac{2}{3}\mathfrak{L}_\lambda) = (-\tfrac{1}{2} M_\lambda - \tfrac{1}{2} L_\lambda;\ -\tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_\lambda - \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}_\lambda) = (-\tfrac{1}{2} N_\lambda;\ -\tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda)$$

wenn N_λ, $\mathfrak{N}_\lambda$ neue durch die Gleichung

$$(M_\lambda + L_\lambda;\ \mathfrak{M}_\lambda + \mathfrak{L}_\lambda) = (N_\lambda;\ \mathfrak{N}_\lambda)$$

definirte Bezeichnungen sind. Will man, und dies gilt namentlich von Theil II, übermässig lange Ausdrücke vermeiden, so muss man solche Abkürzungen einführen. So soll noch zur Abkürzung

$$\sum_1^{m(\mu)} F_\nu = F_1 + F_2 + \ldots F_{\mu-1} + F_\mu + \ldots F_m, \quad \prod_1^{m(\mu)} F_\nu = F_1 \cdot F_2 \ldots F_{\mu-1} \cdot F_{\mu+1} \ldots F_m$$

geschrieben werden, so dass also der obere Index an Summen oder Produktzeichen das Fehlen eines Termes in der Summenreihe oder der Factorenfolge ausdrückt. Für m und μ können andere Buchstaben eintreten, während ν nach dem Frühern typisch sein soll. Setzen wir die k an die Stelle $\mathfrak{k}$ so finden wir

$$\left(u_\lambda(k_{n+1}) - 2\sum_1^n u_\lambda(k_\nu);\ \mathfrak{u}_\lambda(k_{n+1}) - 2\sum_1^n \mathfrak{u}_\lambda(k_\nu)\right) = (i\pi - N_\lambda,\ i\pi - \mathfrak{N}_\lambda).$$

Bedeutet $[x]$ für positive x die Einheit, für negative x und für $x = 0$ die Null, und ist $(i\pi)_{\lambda\mu} = 0$ für $\mu \gtrless \lambda$ und $(i\pi)_{\lambda\lambda} = i\pi$, so erhalten wir ferner aus der Tabelle die Ausdrücke

$$\left(u_\lambda(k_\mu) - 2\sum_1^{n+1(\mu)} u_\lambda(k_\nu);\ \ \mathfrak{u}_\lambda(k_\mu) - 2\sum_1^{n+1(\mu)} \mathfrak{u}_\lambda(k_\nu)\right) =$$

$$(a_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu} + [\mu - \lambda] i\pi - \tfrac{1}{2} N_\lambda;\ \ \mathfrak{a}_{\lambda\mu} - \bar{\mathfrak{a}}_{\lambda\mu} + [\mu - \lambda] i\pi - \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda),$$

$$\left(u_\lambda(\mathfrak{k}_\mu) - 2\sum_1^{n+1(\mu)} u_\lambda(\mathfrak{k}_\nu);\ \ \mathfrak{u}_\lambda(\mathfrak{k}_\mu) - 2\sum_1^{n+1} \mathfrak{u}_\lambda(\mathfrak{k}_\nu)\right) =$$

$$(a_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu} + [\mu + 1 - \lambda] i\pi - \tfrac{1}{2} N_\lambda;\ \ \mathfrak{a}_{\lambda\mu} - \bar{\mathfrak{a}}_{\lambda\mu} + [\mu + 1 - \lambda] i\pi - \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda),$$

$$\left(u_\lambda(k_\mu) - 2\sum_1^{n+1(\mu)} u_\lambda(\mathfrak{k}_\nu);\ \ \mathfrak{u}_\lambda(k_\mu) - 2\sum_1^{n+1(\mu)} \mathfrak{u}_\lambda(\mathfrak{k}_\nu)\right) =$$

$$(a_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu} + [\mu - \lambda] i\pi + \tfrac{2}{3}(i\pi)_{\lambda,\,\mu+1} - \tfrac{1}{2} N;\ \ \mathfrak{a}_{\lambda\mu} - \bar{\mathfrak{a}}_{\lambda\mu} + [\mu - \lambda] i\pi + \tfrac{2}{3}(i\pi)_{\lambda,\,\mu+1} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda),$$

$$\left(u_\lambda(\mathfrak{k}_\mu) - 2\sum_1^{n+1(\mu)} u_\lambda(k_\nu);\ \ \mathfrak{u}_\lambda(\mathfrak{k}_\mu) - 2\sum_1^{n+1(\mu)} \mathfrak{u}_\lambda(k_\nu)\right) =$$

$$(a_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu} + [\mu - \lambda] i\pi + \tfrac{1}{3}(i\pi)_{\lambda,\,\mu+1} - \tfrac{1}{2} N_\lambda;\ \ \mathfrak{a}_{\lambda\mu} - \bar{\mathfrak{a}}_{\lambda\mu} + [\mu - \lambda] i\pi + \tfrac{1}{3}(i\pi)_{\lambda,\,\mu+1} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda).$$

Digitized by Google

Diese Formeln sind auch für $\mu = n+1$ richtig, wenn man $a_{\lambda\, n+1}$ $\alpha_{\lambda\, n+1}$ $\overline{a_{\lambda\, n+1}}$ $\overline{\alpha_{\lambda\, n+1}}$ gleich Null annimmt.

§ 30. Ferner erhalten wir

$$\left(u_\lambda(k_\mu) - 2\sum_1^{n+1}{}^{(\mu')} u_\lambda(k_\nu) + \tfrac{1}{2}N_\lambda;\ \mathfrak{u}_\lambda(k_\mu) - 2\sum_1^{n+1}{}^{(\mu')}\mathfrak{u}_\lambda(k_\nu) + \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda\right)$$

$$= \begin{cases} (\tfrac{1}{3}(a_{\lambda\mu} - \overline{a}_{\lambda\mu}) + \tfrac{2}{3}(a_{\lambda\mu'} - \overline{a}_{\lambda\mu'}) + \tfrac{1}{3}[\mu - \lambda]i\pi + \tfrac{2}{3}[\mu' - \lambda]i\pi; \\ \tfrac{1}{3}(\alpha_{\lambda\mu} - \overline{\alpha}_{\lambda\mu}) + \tfrac{2}{3}(\alpha_{\lambda\mu'} - \overline{\alpha}_{\lambda\mu'}) + \tfrac{1}{3}[\mu - \lambda]i\pi + \tfrac{2}{3}[\mu' - \lambda]i\pi). \end{cases}$$

$$\left(u_\lambda(k_\mu) - 2\sum_1^{n+1}{}^{(\mu')} u_\lambda(\mathfrak{k}_\nu) + \tfrac{1}{2}N_\lambda;\ \mathfrak{u}_\lambda(k_\mu) - 2\sum_1^{n+1}{}^{(\mu')}\mathfrak{u}_\lambda(\mathfrak{k}_\nu) + \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda\right)$$

$$= \begin{cases} (\tfrac{1}{3}(a_{\lambda\mu} - \overline{a}_{\lambda\mu}) + \tfrac{2}{3}(a_{\lambda\mu'} - \overline{a}_{\lambda\mu'}) + \tfrac{1}{3}[\mu - \lambda]i\pi + \tfrac{2}{3}[\mu' + 1 - \lambda]i\pi; \\ \tfrac{1}{3}(\alpha_{\lambda\mu} - \overline{\alpha}_{\lambda\mu}) + \tfrac{2}{3}(\alpha_{\lambda\mu'} - \overline{\alpha}_{\lambda\mu'}) + \tfrac{1}{3}[\mu - \lambda]i\pi + \tfrac{2}{3}[\mu' + 1 - \lambda]i\pi). \end{cases}$$

$$\left(u_\lambda(\mathfrak{k}_\mu) - 2\sum_1^{n+1}{}^{(\mu')} u_\lambda(k_\nu) + \tfrac{1}{2}N_\lambda;\ \mathfrak{u}_\lambda(\mathfrak{k}_\mu) - 2\sum_1^{n+1}{}^{(\mu')}\mathfrak{u}_\lambda(k_\nu) + \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda\right)$$

$$= \begin{cases} (\tfrac{1}{3}(a_{\lambda\mu} - \overline{a}_{\lambda\mu}) + \tfrac{2}{3}(a_{\lambda\mu'} - \overline{a}_{\lambda\mu'}) + \tfrac{1}{3}[\mu + 1 - \lambda]i\pi + \tfrac{2}{3}[\mu' - \lambda]i\pi; \\ \tfrac{1}{3}(\alpha_{\lambda\mu} - \overline{\alpha}_{\lambda\mu}) + \tfrac{2}{3}(\alpha_{\lambda\mu'} - \overline{\alpha}_{\lambda\mu'}) + \tfrac{1}{3}[\mu + 1 - \lambda]i\pi + \tfrac{2}{3}[\mu' - \lambda]i\pi). \end{cases}$$

$$\left(u_\lambda(\mathfrak{k}_\mu) - 2\sum_1^{n+1}{}^{(\mu')} u_\lambda(\mathfrak{k}_\nu) + \tfrac{1}{2}N_\lambda;\ \mathfrak{u}_\lambda(\mathfrak{k}_\mu) - 2\sum_1^{n+1}{}^{(\mu')}\mathfrak{u}_\lambda(\mathfrak{k}_\nu) + \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda\right)$$

$$= \begin{cases} (\tfrac{1}{3}(a_{\lambda\mu} - \overline{a}_{\lambda\mu}) + \tfrac{2}{3}(a_{\lambda\mu'} - \overline{a}_{\lambda\mu'}) + \tfrac{1}{3}[\mu + 1 - \lambda]i\pi + \tfrac{2}{3}[\mu' + 1 - \lambda]i\pi; \\ \tfrac{1}{3}(\alpha_{\lambda\mu} - \overline{\alpha}_{\lambda\mu}) + \tfrac{2}{3}(\alpha_{\lambda\mu'} - \overline{\alpha}_{\lambda\mu'}) + \tfrac{1}{3}[\mu + 1 - \lambda]i\pi + \tfrac{2}{3}[\mu' + 1 - \lambda]i\pi). \end{cases}$$

Eine andere brauchbare Relation erhalten wir in folgender Weise. Es ist:

$$\left(\sum_1^{n+1} u_\lambda(k_\nu) + u_\lambda(\mathfrak{k}_\nu) - \frac{3}{p-1}K_\lambda;\ \sum_1^{n+1}\mathfrak{u}_\lambda(k_\nu) + \mathfrak{u}_\lambda(\mathfrak{k}_\lambda) - \frac{3}{p-1}\mathfrak{K}_\lambda\right) =$$

$$(\tfrac{2}{3}L_\lambda + K_\lambda;\ \tfrac{2}{3}\mathfrak{L}_\lambda + \mathfrak{K}_\lambda) = (\tfrac{1}{2}M_\lambda + \tfrac{1}{2}L_\lambda;\ \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_\lambda + \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}_\lambda) = (\tfrac{1}{2}N_\lambda;\ \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda).$$

Sind nun $x_1\, x_2 \ldots x_{n+1}$, $n+1$ verschiedene Verzweigungspuncte und $x_1'\, x_2' \ldots x_{n+1}'$ die übrigen, so folgt hieraus

$$\left(2\sum_1^{n+1} u_\lambda(x_\nu) - \frac{3}{p-1}K_\lambda;\ 2\sum_1^{n+1}\mathfrak{u}_\lambda(x_\nu) - \frac{3}{p-1}\mathfrak{K}_\lambda\right) =$$

$$\left(N_\lambda - 2\sum_1^{n+1} u_\lambda(x_\nu') + \frac{3}{p-1}\mathfrak{K}_\lambda;\ \mathfrak{N}_\lambda - 2\sum_1^{n+1}\mathfrak{u}_\lambda(x_\nu') + \frac{3}{p-1}\mathfrak{K}_\lambda\right)$$

$$\equiv -\left(2\sum_1^{n+1} u_\lambda(x_\nu') - \frac{3}{p-1}K_\lambda;\ \ 2\sum_1^{n+1}\mathfrak{u}_\lambda(x_\nu') - \frac{3}{p-1}\mathfrak{K}_\lambda\right).$$

§ 31. **Grenzwerthe der Periodicitätsmoduln.** Lässt man die Verzweigungspuncte $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2 \ldots \mathfrak{k}_n$ näher und näher bez. an $k_1, k_2 \ldots k_n$ rücken, so werden von den Periodicitätsmoduln einige unendlich gross, andere aber erhalten berechenbare Werthe. Zunächst erhält man durch Anwendung des Cauchy'schen Satzes die Residuenintegrale betreffend

$$A_{\mu\mu'} = -\int_{b_{\mu'}} \frac{z^{\mu-1}}{\sqrt[3]{(z-k_{n+1})\,(z-\mathfrak{k}_{n+1})^2}} \cdot \frac{dz}{z-\mathfrak{k}_1 \,.\, z-\mathfrak{k}_2 \ldots z-\mathfrak{k}_n}$$

$$= \frac{-2i\pi\, k_{\mu'}^{\mu-1}}{\sqrt[3]{(k_{\mu'}-k_{n+1})\,(k_{\mu'}-\mathfrak{k}_{n+1})^2}} \cdot \frac{k_{\mu'}-k_{n+1}}{P'(k_{\mu'})} = \frac{-2i\pi\, k_{\mu'}^{\mu-1}}{P'(k_{\mu'})} \cdot \sqrt[3]{\frac{(k_{\mu'}-k_{n+1})^2}{(k_{\mu'}-\mathfrak{k}_{n+1})^2}},$$

Digitized by Google

$$\mathfrak{A}_{\mu\mu'} = -\int_{\mathfrak{b}_{\mu'}} \frac{z-k_{n+1}}{P(z)} \frac{z^{\mu-1}\,dz}{\sqrt[3]{(z-k_{n+1})^2\,(z-\mathfrak{k}_{n+1})}} = \frac{2i\pi\,k_{\mu'}^{\mu-1}}{P'(k_{\mu'})} \cdot \sqrt[3]{\frac{k_{\mu'}-k_{n+1}}{k_{\mu'}-\mathfrak{k}_{n+1}}},$$

und hieraus

$$|A| = \frac{(-1)^n\,(2i\pi)^n\,.\,|\,k_\lambda^{\lambda'-1}\,|}{P'(k_1)\,P'(k_2)\ldots P'(k_n)} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{P'(k_{n+1})}{\mathfrak{P}'(\mathfrak{k}_{n+1})}\right)^2} = \frac{(-1)^{n\cdot\frac{n-1}{2}}\,.\,(2i\pi)^n : |\,k_\lambda^{\lambda'-1}\,|}{\sqrt[3]{P'(k_{n+1})\,(\mathfrak{P}'(\mathfrak{k}_{n+1}))^2}},$$

$$|\mathfrak{A}| = \frac{(-1)^{n\frac{n-1}{2}}\,(-1)^n\,.\,(2i\pi)^n : |\,k_\lambda^{\lambda'-1}\,|}{\sqrt[3]{(P'(k_{n+1}))^2\,\mathfrak{P}'(\mathfrak{k}_{n+1})}}.$$

§ 32. Wir benutzen nun einen allgemeinen Satz aus der Theorie der Determinanten (Baltzer Determinanten, erste Auflage 12, 6)

$$\begin{vmatrix} 1, & k_1 & , k_1^2 & , \ldots & k_1^{\mu-2}, & k_1^{\mu} & , \ldots & k_1^{n-1} \\ 1, & k_2 & , k_2^2 & , \ldots & k_2^{\mu-2}, & k_2^{\mu} & , \ldots & k_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1, & k_{\mu'-1} & , k_{\mu'-1}^2 & , \ldots & k_{\mu'-1}^{\mu-2}, & k_{\mu'}^{\mu} & , \ldots & k_{\mu'-1}^{n-1} \\ 1, & k_{\mu'+1} & , k_{\mu'+1}^2 & , \ldots & k_{\mu'+1}^{\mu-2}, & k_{\mu'+1}^{\mu} & , \ldots & k_{\mu'+1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1, & k_n & , k_n^2 & , \ldots & k_n^{\mu-2}, & k_n^{\mu} & , \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{\mu+\mu'}\,\delta\,\Delta(k_1, k_2 \ldots k_n)}{\delta\,k_{\mu'}^{\mu-1}} = C_{n-\mu+1,\mu'} \cdot \Delta(k_1, k_2 \ldots k_{\mu'-1}, k_{\mu'+1} \ldots k_n),$$

worin

$$C_{1\mu'} = 1,\ C_{2\mu'} = k_1 + k_2 \ldots + k_{\mu'-1} + k_{\mu'+1} + \ldots + k_n,$$
$$C_{3\mu'} = k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_1 k_{\mu'-1} + k_1 k_{\mu'+1} + \ldots k_1 k_n + k_2 k_3 + k_2 k_4 \ldots k_{n-1} k_n,$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$C_{n\mu'} = k_1 k_2 k_3 \ldots k_{\mu'-1} k_{\mu'+1} \ldots k_n$$

ist.

§ 33. Mit Hilfe dieses Satzes finden wir

$$\frac{\delta\,|A|}{\delta A_{\mu\mu'}} = (2i\pi)^{n-1} \frac{\delta\,|\,k_\lambda^{\lambda'-1}\,|}{\delta\,k_{\mu'}^{\mu-1}} : \Delta^2(k_2 \ldots k_{\mu'-1}, k_{\mu'+1} \ldots k_n) \prod_1^n{}^{(\mu')}(k_\nu - k_{\mu'}) \sqrt[3]{\prod_1^n{}^{(\mu')}(k_\nu - k_{n+1})\,(k_\nu - \mathfrak{k}_{n+1})^2}.$$

Nun ist

$$\Delta(k_1 \ldots k_{\mu'-1}\,k_{\mu'+1} \ldots k_n) \prod_1^n{}^{(\mu')}(k_\nu - k_{\mu'}) = (-1)^{\mu'-1}\,\Delta(k_1 \ldots k_\mu \ldots k_n) = (-1)^{\mu'-1}\,|\,k_\lambda^{\lambda'-1}\,|,$$

also

$$\frac{\delta\,|\,A\,|}{\delta\,A_{\mu\mu'}} = (-1)^{n\frac{n-1}{2}}\,(2i\pi)^{n-1}\,(-1)^{n-\mu}\,C_{n-\mu+1,\mu'} : |\,k_\lambda^{\lambda'-1}\,| \sqrt[3]{\prod_1^n{}^{(\mu')}(k_\nu - k_{n+1})\,(k_\nu - \mathfrak{k}_{n+1})^2},$$

$$i\pi\,\frac{\delta \lg |\,A\,|}{\delta\,A_{\mu\mu'}} = -\tfrac{1}{2}(-1)^{n-\mu}\,C_{n-\mu+1,\mu'} \sqrt[3]{(k_{\mu'}-k_{n+1})\,(k_{\mu'}-\mathfrak{k}_{n+1})^2},$$

und ähnlich

$$i\pi\,\frac{\delta \lg |\,\mathfrak{A}\,|}{\delta\,\mathfrak{A}_{\mu\mu'}} = \tfrac{1}{2}(-1)^{n-\mu}\,C_{n-\mu+1,\mu'} \sqrt[3]{(k_{\mu'}-k_{\nu+1})^2\,(k_{\mu'}-\mathfrak{k}_{n+1})}.$$

Digitized by Google

Da nun $\sum_1^n{}^{(\mu')}(-1)^{n-\mu} C_{n-\mu+1,\mu'} z^{\mu-1} = z-k_1 . z-k_2 \ldots z-k_{\mu'-1} . z-k_{\mu'+1} \ldots z-k_n$ ist, so folgen hieraus die Gleichungen:

$$x_{\mu'} = -\tfrac{1}{2}\int \sqrt[3]{\frac{k_{\mu'}-k_{n+1}}{z-k_{n+1}} \frac{(k_{\mu'}-\mathfrak{k}_{n+1})^2}{(z-\mathfrak{k}_{n-1})^2}} \cdot \frac{dz}{z-k_{\mu'}},$$

$$\mathfrak{x}_{\mu'} = \tfrac{1}{2}\int \sqrt[3]{\frac{(k_{\mu'}-k_{n+1})^2}{(z-k_{n+1})^2} \frac{k_{\mu'}-\mathfrak{k}_{n+1}}{z-\mathfrak{k}_{n+1}}} \cdot \frac{dz}{z-k_{\mu'}}.$$

Die dritten Wurzeln in diesen Ausdrücken sind so zu nehmen, dass in $x_{\mu'}$ für $z = k_{\mu'}$ dieselbe im ersten Blatte Eins ist, in $\mathfrak{x}_{\mu'}$ aber im dritten Blatte. Hieraus erkennt man sofort, dass die Periodicitätsmoduln $x_{\mu\mu'}$ $\mathfrak{x}_{\mu\mu'}$ endlich bleiben, aber $x_{\mu\mu}$ $\mathfrak{x}_{\mu\mu}$ unendlich werden. Man kann den Verhältnissen $x_{11} : x_{22} \ldots x_{nn} = \overline{x_{11}} : \overline{x_{22}} \ldots \overline{x_{nn}}$ beliebige Werthe geben, wenn man nur $\mathfrak{k}_1\ \mathfrak{k}_2 \ldots \mathfrak{k}_n$ in passenden Verhältnissen den Werthen $k_1\ k_2 \ldots k_n$ nähert.

§ 34. Es erübrigt noch die Grenzwerthe der a und $\overline{a}$ festzustellen. Da

$$a_{\mu\mu'} = (x_{\mu\mu'} + \tau\mathfrak{x}_{\mu\mu'}) : (1-\tau^2), \quad \overline{a}_{\mu\mu'} = (\overline{x}_{\mu\mu'} + \tau\overline{\mathfrak{x}}_{\mu\mu'}) : (1-\tau^2),$$
$$a_{\mu\mu'} = (\tau x_{\mu\mu'} + \mathfrak{x}_{\mu\mu'}) : (1-\tau^2), \quad \overline{a}_{\mu\mu'} = (\tau\overline{x}_{\mu\mu'} + \overline{\mathfrak{x}}_{\mu\mu'}) : (1-\tau^2)$$

ist, so erkennt man leicht, dass diese Grössen endlich sind, so lange $\mu \gtrless \mu'$ ist, aber unendlich gross, wenn $\mu = \mu'$ ist. Es können aber die Verhältnisse

$$a_{11} : a_{22} \ldots a_{nn}$$

jedwede Werthe annehmen, wenn die Annäherung der $\mathfrak{k}$ an die k in geeigneter Weise herbeigeführt wird.

§ 35. Man kann ebensogut wie die Normalintegrale u, $\mathfrak{u}$ gebildet sind, die an einem Querschnitte a oder $\bar{a}$ den Periodicitätsmodul $i\pi$ haben, an den andern aber den Modul Null, ähnliche Integrale u', $\mathfrak{u}'$ bilden, welche an den Schnitten b und $\overline{b}$ den Periodicitätsmodul Null haben bis auf einen, an welchem der Modul $-i\pi$ ist. Dies ist nöthig, wenn man Grenzbetrachtungen anstellen will, bei denen $\mathfrak{k}_1$ an k_2, $\mathfrak{k}_2$ an $k_3, \ldots \mathfrak{k}_n$ an k_{n+1} unendlich nahe rücken soll. Die Integrale

$$x'_\mu = -i\pi \sum_1^n w_\nu \frac{\delta \lg |B|}{\delta B_{\nu\mu}}, \quad \mathfrak{x}'_\mu = -i\pi \sum_1^n \mathfrak{w}_\nu \frac{\delta \lg |\mathfrak{B}|}{\delta \mathfrak{B}_{\nu\mu}}$$

haben die Eigenschaft, dass die Periodicitätsmoduln von x'_μ an den Schnitten b_μ gleich $-i\pi$; $\overline{b}_\mu$ gleich $-\tau^2 i\pi$, an den übrigen b und $\overline{b}$ Null sind, bei $a_{\mu'}$ $\overline{a}_{\mu'}$ seien sie bez. $x'_{\mu\mu'}$ $\overline{x}'_{\mu\mu'}$. Der Periodicitätsmodul von $\mathfrak{x}'_\mu$ bei b_μ ist $-\tau^2 i\pi$ bei $\overline{b}_\mu$ aber $-i\pi$, an den übrigen b und $\overline{b}$ Null. Bei $a_{\mu'}$ $\overline{a}_{\mu'}$ seien sie bez. $\mathfrak{x}'_{\mu\mu'}$ $\overline{\mathfrak{x}}'_{\mu\mu'}$. Hieraus bildet man die Functionen

$$u'_\mu = (x'_\mu - \tau^2\mathfrak{x}'_\mu) : (1-\tau), \quad \mathfrak{u}'_\mu = (-\tau^2 x'_\mu + \mathfrak{x}'_\mu) : (1-\tau)$$

deren Periodicitätsmodul bei $b_{\mu'}$ $\overline{b}_{\mu'}$ bez. mit $b_{\mu\mu'}$ $\overline{b}_{\mu\mu'}$ $\mathfrak{b}_{\mu\mu'}$ $\overline{\mathfrak{b}}_{\mu\mu'}$ bezeichnet werden sollen. Bei a_μ ist der von u'_μ gleich $-i\pi$ bei allen übrigen a und $\overline{a}$ Null. Bei $\overline{a}_\mu$ ist der von $\mathfrak{u}'_\mu$ gleich $-i\pi$ bei allen übrigen a und $\overline{a}$ Null. Zwischen den $x\ \mathfrak{x}\ x'\ \mathfrak{x}'$ bestehen die Gleichungen

$$x'_\mu = -i\pi \sum_1^n x_\nu \frac{\delta \lg |x_{\lambda\lambda'}|}{\delta x_{\nu\mu}}, \quad \mathfrak{x}'_\mu = -i\pi \sum_1^n \mathfrak{x}_\nu \frac{\delta \lg |\overline{\mathfrak{x}}_{\lambda\lambda'}|}{\delta \overline{\mathfrak{x}}_{\nu\mu}},$$

aus denen sich ergiebt

$$x'_{\mu\mu'} = \pi^2 \frac{\delta \lg |x|}{\delta x_{\mu'\mu}}, \quad \overline{x}'_{\mu\mu'} = -\tau\pi^2 \frac{\delta \lg |x|}{\delta x_{\mu'\mu}},$$
$$\mathfrak{x}'_{\mu\mu'} = -\tau\pi^2 \frac{\delta \lg |\overline{\mathfrak{x}}|}{\delta \overline{\mathfrak{x}}_{\mu'\mu}}, \quad \overline{\mathfrak{x}}'_{\mu\mu'} = \pi^2 \frac{\delta \lg |\overline{\mathfrak{x}}|}{\delta \overline{\mathfrak{x}}_{\mu'\mu}}.$$

Lässt man die Puncte $\mathfrak{k}_1$ an $k_2, \ldots \mathfrak{k}_n$ an k_{n+1} unendlich nahe heranrücken, so ist

Digitized by Google

$$B_{\mu\mu'} = \int_{a_{\mu'}} \frac{z^{\mu-1}\,dz}{\sqrt[3]{(z-k_1)\,(z-\mathfrak{k}_{n+1})^2 \,.\, z-\mathfrak{k}_1 \,.\, z-\mathfrak{k}_2 \ldots z-\mathfrak{k}_n}}$$

$$= 2i\pi \sum_{\mu'}^{n(\nu)} \frac{\mathfrak{k}_\nu^{\mu-1}\,(\mathfrak{k}_\nu - \mathfrak{k}_{n+1})}{\sqrt[3]{(\mathfrak{k}_\nu - k_1)\,(\mathfrak{k}_\nu - \mathfrak{k}_{n+1})^2}\;\mathfrak{P}'(\mathfrak{k}_\nu)},$$

woraus fliesst

$$|B| = \frac{(2i\pi)^n :. |\,\mathfrak{k}_{\lambda'}^{\lambda-1}\,|}{\sqrt[3]{\prod_1^n (\mathfrak{k}_\nu - k_1)\;(\mathfrak{k}_\nu - \mathfrak{k}_{n+1})^2}}, \quad |\overline{\mathfrak{B}}| = \frac{(2i\pi)^n : |\,\mathfrak{k}_{\lambda'}^{\lambda-1}\,|}{\sqrt[3]{\prod_1^n (\mathfrak{k}_\nu - k_1)^2\;(\mathfrak{k}_\nu - \mathfrak{k}_{n+1})}}.$$

Eine der des vorigen Paragraphen ähnlich geführte Untersuchung zeigt, dass $x'_{\mu\mu'}$ $\mathfrak{x}'_{\mu\mu'}$ $\overline{x}'_{\mu\mu'}$ $\overline{\mathfrak{x}}'_{\mu\mu'}$ und ebenso $b_{\mu\mu'}$ $\overline{b}_{\mu\mu'}$ $\mathfrak{b}_{\mu\mu'}$ $\overline{\mathfrak{b}}_{\mu\mu'}$ endliche Grössen sind, so lange $\mu \gtrless \mu'$ ist, hingegen über alle Grenzen wachsen, wenn $\mu = \mu'$ ist. Durch passende Wahl der Annäherung der $\mathfrak{k}$ an die k kann man jedoch den absoluten Werthen der Verhältnisse $x'_{11} : x'_{22} : \ldots x'_{nn}$ oder $\overline{\mathfrak{x}}'_{11} : \overline{\mathfrak{x}}'_{22} : \ldots \overline{\mathfrak{x}}'_{nn}$ jedwede Werthe ertheilen.

Integrale zweiter Gattung.

§ 36. Die einfachsten Integrale zweiter Gattung erhält man durch Differentiation der Integrale erster Gattung nach irgend einem Verzweigungswerthe. Um Integrale zu erhalten, die zu beiden Seiten sämmtlicher Schnitte a und $\bar{a}$ denselben Werth annehmen, kann man die Integrale u und $\mathfrak{u}$ differenziren, und erhält so wenn $\varkappa$ ein Verzweigungspunct k oder $\mathfrak{k}$ ist:

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial \varkappa} = \frac{1-\tau}{3}\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial \varkappa} + \tau \frac{\partial \mathfrak{x}_\mu}{\partial \varkappa}\right), \quad \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \varkappa} = \frac{1-\tau}{3}\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial \varkappa}\tau + \frac{\partial \mathfrak{x}_\mu}{\partial \varkappa}\right).$$

Die Periodicitätsmoduln an den Schnitten $b_{\mu'}$ $\overline{b}_{\mu'}$ sind dann bez.

$$\frac{\partial a_{\mu\mu'}}{\partial \varkappa}, \quad \frac{\partial \overline{a}_{\mu\mu'}}{\partial \varkappa}, \quad \frac{\partial \mathfrak{a}_{\mu\mu'}}{\partial \varkappa}, \quad \frac{\partial \overline{\mathfrak{a}}_{\mu\mu'}}{\partial \varkappa}.$$

Diese Integrale sind jedoch nicht die einfachsten, weil sie im Puncte $\varkappa$ unendlich gross zweiter Ordnung werden, so dass in der Entwicklung derselben nach Potenzen von $z-\varkappa$ sowohl das Glied $(z-\varkappa)^{-\frac{1}{2}}$ als auch das Glied $(z-\varkappa)^{-\frac{3}{2}}$ vorhanden ist. Einfachere Integrale zweiter Gattung erhält man, wenn man die x und $\mathfrak{x}$ nach Verzweigungswerthen differenzirt. Da die Periodicitätsmoduln der x und $\mathfrak{x}$ an den Schnitten a und $\bar{a}$ sämmtlich numerische Grössen, also von der Lage der Verzweigungspuncte unabhängig sind, so haben die Differentialquotienten die nämliche Eigenschaft, an sämmtlichen Schnitten a, $\bar{a}$ den Periodicitätsmodul Null zu haben. Die Function $\frac{dx_\mu}{dk}$ wird im Puncte k $\frac{d\mathfrak{x}_\mu}{d\mathfrak{k}}$ im Puncte $\mathfrak{k}$ unendlich gross erster Ordnung.

§ 37. Offenbar kann man die Constanten D und $\mathfrak{D}$ in den Ausdrücken

$$\frac{dx_\mu}{dk} + D\frac{dx_{\mu'}}{dk}, \quad \frac{d\mathfrak{x}_\mu}{d\mathfrak{k}} + \mathfrak{D}\frac{d\mathfrak{x}_\mu}{d\mathfrak{k}}$$

so einrichten, dass dieselben nirgend unendlich werden. Also sind sie dann Integrale erster Gattung, und haben an allen Querschnitten a und $\bar{a}$ den Periodicitätsmodul Null. Deshalb sind sie nothwendig Constante und haben also auch an den Schnitten b und $\bar{b}$ den Periodicitätsmodul Null. Daraus fliessen die Proportionen:

$$\frac{\partial x_{\mu 1}}{\partial k_{\mu'}} : \frac{\partial x_{\mu 2}}{\partial k_{\mu'}} : \ldots : \frac{\partial x_{\mu n}}{\partial k_{\mu'}} = \frac{\partial \overline{x}_{\mu 1}}{\partial k_{\mu'}} : \frac{\partial \overline{x}_{\mu 2}}{\partial k_{\mu'}} : \ldots : \frac{\partial \overline{x}_{\mu n}}{\partial k_{\mu'}}$$

$$= \frac{\partial x_{\varrho 1}}{\partial k_{\mu'}} : \frac{\partial x_{\varrho 2}}{\partial k_{\mu'}} : \ldots : \frac{\partial x_{\varrho n}}{\partial k_{\mu'}} = \frac{\partial \overline{x}_{\varrho 1}}{\partial k_{\mu'}} : \frac{\partial \overline{x}_{\varrho 2}}{\partial k_{\mu'}} : \ldots : \frac{\partial \overline{x}_{\varrho n}}{\partial k_{\mu'}},$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial \mathfrak{x}_{\mu 1}}{\partial \mathfrak{k}_{\mu'}} : \frac{\partial \mathfrak{x}_{\mu 2}}{\partial \mathfrak{k}_{\mu'}} : \ldots : \frac{\partial \mathfrak{x}_{\mu n}}{\partial \mathfrak{k}_{\mu'}} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}_{\mu 1}}{\partial \mathfrak{k}_{\mu'}} : \frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}_{\mu 2}}{\partial \mathfrak{k}_{\mu'}} : \ldots : \frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}_{\mu n}}{\partial \mathfrak{k}_{\mu'}}$$
$$= \frac{\partial \mathfrak{x}_{\varrho 1}}{\partial \mathfrak{k}_{\mu'}} : \frac{\partial \mathfrak{x}_{\varrho 2}}{\partial \mathfrak{k}_{\mu'}} : \ldots : \frac{\partial \mathfrak{x}_{\varrho n}}{\partial \mathfrak{k}_{\mu'}} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}_{\varrho 1}}{\partial \mathfrak{k}_{\mu'}} : \frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}_{\varrho 2}}{\partial \mathfrak{k}_{\mu'}} : \ldots : \frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}_{\varrho n}}{\partial \mathfrak{k}_{\mu'}}.$$

§ 38. Die Differentialquotienten $\partial x_\mu : \partial \mathfrak{k}_\varrho$ und $\partial \mathfrak{x}_\mu : \partial k_\varrho$ werden unendlich gross zweiter Ordnung in den Puncten $\mathfrak{k}_\varrho$ bez. k_ϱ, jedoch so, dass in der Entwickelung nach Potenzen von $z - \mathfrak{k}_\varrho$ bez. $z - k_\varrho$ nur das Glied $(z-\mathfrak{k}_\varrho)^{-\frac{3}{3}}$ bez. $(z-k_\varrho)^{-\frac{3}{3}}$ vorkommt, während $(z-\mathfrak{k}_\varrho)^{-\frac{1}{3}}$ und $(z-k_\varrho)^{-\frac{1}{3}}$ fehlen. Dies ist der Grund, dass man in den Ausdrücken

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial \mathfrak{k}_\varrho} + E\frac{\partial x_{\mu'}}{\partial \mathfrak{k}_\varrho}, \quad \frac{\partial \mathfrak{x}_\mu}{\partial k_\varrho} + \mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{x}_{\mu'}}{\partial k_\varrho}$$

die Constanten E und $\mathfrak{E}$ so einrichten kann, dass diese Functionen nicht unendlich werden, folglich so, dass sie Constante sind. Daraus folgen wie vorhin die Proportionen

$$\frac{\partial x_{\mu 1}}{\partial \mathfrak{k}_\varrho} : \frac{\partial x_{\mu 2}}{\partial \mathfrak{k}_\varrho} : \ldots : \frac{\partial x_{\mu n}}{\partial \mathfrak{k}_\varrho} = \frac{\partial \bar{x}_{\mu 1}}{\partial \mathfrak{k}_\varrho} : \frac{\partial \bar{x}_{\mu 2}}{\partial \mathfrak{k}_\varrho} : \ldots : \frac{\partial \bar{x}_{\mu n}}{\partial \mathfrak{k}_\varrho}$$
$$= \frac{\partial x_{\mu' 1}}{\partial \mathfrak{k}_\varrho} : \frac{\partial x_{\mu' 2}}{\partial \mathfrak{k}_\varrho} : \ldots : \frac{\partial x_{\mu' n}}{\partial \mathfrak{k}_\varrho} = \frac{\partial \bar{x}_{\mu'}}{\partial \mathfrak{k}_\varrho} : \frac{\partial \bar{x}_{\mu' 2}}{\partial \mathfrak{k}_\varrho} : \ldots : \frac{\partial \bar{x}_{\mu' n}}{\partial \mathfrak{k}_\varrho},$$
$$\frac{\partial \mathfrak{x}_{\mu 1}}{\partial k_\varrho} : \frac{\partial \mathfrak{x}_{\mu 2}}{\partial k_\varrho} : \ldots : \frac{\partial \mathfrak{x}_{\mu n}}{\partial k_\varrho} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}_{\mu 1}}{\partial k_\varrho} : \frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}_{\mu 2}}{\partial k_\varrho} : \ldots : \frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}_{\mu n}}{\partial k_\varrho}$$
$$= \frac{\partial \mathfrak{x}_{\mu' 1}}{\partial k_\varrho} : \frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}_{\mu' 2}}{\partial k_\varrho} : \ldots : \frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}_{\mu' n}}{\partial k_\varrho} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}_{\mu' 1}}{\partial k_\varrho} : \frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}_{\mu' 2}}{\partial k_\varrho} : \ldots : \frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}_{\mu' n}}{\partial k_\varrho}.$$

§ 39. Eine Function $t(s, z; s_1, z_1)$ die als Function von z_1 wie $\frac{1}{z - z_1}$ unendlich gross erster Ordnung wird, und an den Schnitten a und $\bar{a}$ den Periodicitätsmodul Null hat — durch welche Eigenschaften sie bis auf eine additive Constante bestimmt ist — kann man leicht mit Hilfe der auf Seite 5 gegebenen Function $S(s_1, z_1; s, z)$ construiren. Diese Function S wird in allen Verzweigungspuncten unendlich gross erster Orduung, und man kann daher in dem Ausdrucke

$$\sum_1^{n+1}\left(X_{\mu\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial k_\nu} + \mathfrak{X}_{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{x}_\mu}{\partial \mathfrak{k}_\nu}\right) - S(s_1, z_1;\ s, z) = t(s, z;\ s_1, z_1),$$
$$S(s_1, z_1;\ s, z) = \frac{P_1 \mathfrak{P} s^2 + P_1 \mathfrak{P} s s_1 + \mathfrak{P}_1 P s_1^2}{3 s^2 \mathfrak{P} P_1 (z_1 - z)}$$

die Grössen $X_{\mu\nu}$ und $\mathfrak{X}_{\mu\nu}$ so einrichten, dass diese Functionen in keinem Verzweigungspuncte unendlich wird. Multiplicirt man t mit $\sqrt[3]{z_1 - k_\nu}$ oder $\sqrt[3]{z_1 - \mathfrak{k}_\nu}$ und setzt bez. $z_1 = k_\nu$, $\mathfrak{k}_\nu$, so muss das Produkt verschwinden. Daraus folgt

$$X_{\mu\nu} \cdot \lim_{z = k_\nu} \sqrt[3]{z_1 - k_\nu} \cdot \int^{z_1} \frac{i\pi f_\mu(z)\, dz}{3.s.\mathfrak{P}.(z - k_\nu)} - \lim_{z_1 = k_\nu} \sqrt[3]{z_1 - k_\nu} \cdot S(s_1, z_1;\ s, z) = 0.$$

Wenn man nun unter dem Integralzeichen noch Potenzen von $z - k_\nu$ entwickelt, sodann bis z_1 integrirt, mit $\sqrt[3]{z_1 - k_\nu}$ multiplicirt, und $z_1 = k_\nu$ setzt, so bleibt offenbar nur das erste Glied stehen, und man erhält:

$$\lim_{z_1 = k_\nu} \sqrt[3]{z_1 - k_\nu} \int^{z_1} \frac{i\pi f(z)\, dz}{3.s.\mathfrak{P}.(z - k_\nu)} = -\frac{i\pi \,.\, f(k_\nu)}{\sqrt[3]{P'(k_\nu)\,(\mathfrak{P}(k_\nu))^2}},$$

Digitized by Google

$$\lim_{z_1 = k_\nu} \sqrt[3]{z_1 - k_\nu}\, S(s_1, z_1;\ s, z) = \frac{s}{3(k_\nu - z)} \cdot \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{P}(k_\nu)}{P'(k_\nu)}}$$

wodurch die obige Gleichung in die folgende übergeht

$$X_{\mu\nu} \cdot \frac{i\pi f_\mu(k_\nu)}{\sqrt[3]{P'(k_\nu)\,(\mathfrak{P}(k_\nu))^2}} + \frac{s}{3(k_\nu - z)} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{P}(k_\nu)}{P'(k_\nu)}} = 0,$$

woraus fliesst

$$X_{\mu\nu} = \frac{\frac{1}{3}s}{z - k_\nu} \cdot \frac{\mathfrak{P}(k_\nu)}{i\pi f_\mu(k_\nu)}, \quad \mathfrak{X}_{\mu\varrho} = \frac{\frac{1}{3}\mathfrak{s}}{z - \mathfrak{k}_\nu} \cdot \frac{P(\mathfrak{k}_\nu)}{i\pi \mathfrak{f}_\mu(\mathfrak{k}_\nu)}.$$

§ 40. Multiplicirt man t mit $\mathfrak{s}P$ und setzt $z = k_\nu$, oder mit $s\mathfrak{P}$ und setzt $z = \mathfrak{k}_\nu$, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\lim_{z = k_\nu} t(s, z;\ s_1, z_1)\,\mathfrak{s}P = \frac{\partial x_\mu}{\partial k_\nu} \frac{\frac{1}{3}R'(k_\nu)}{i\pi f_\mu(k_\nu)}, \quad \lim_{z = \mathfrak{k}_\nu} t(s, z;\ s_1, z_1)\, s\mathfrak{P} = \frac{\partial \mathfrak{x}_\mu}{\partial \mathfrak{k}_\nu} \frac{\frac{1}{3}R'(\mathfrak{k}_\nu)}{i\pi \mathfrak{f}_\mu(\mathfrak{k}_\nu)}.$$

Da die linken Seiten dieser Gleichungen von der Wahl des Buchstaben μ unabhängig sind, so ergiebt sich noch

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial k_\nu} \frac{1}{f_\mu(k_\nu)} = \frac{\partial x_{\mu'}}{\partial k_\nu} \frac{1}{f_{\mu'}(k_\nu)}, \quad \frac{\partial \mathfrak{x}_\mu}{\partial \mathfrak{k}_\nu} \frac{1}{\mathfrak{f}_\mu(\mathfrak{k}_\nu)} = \frac{\partial \mathfrak{x}_{\mu'}}{\partial \mathfrak{k}_\nu} \frac{1}{\mathfrak{f}_{\mu'}(\mathfrak{k}_\nu)},$$

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial k_\nu} : \frac{\partial x_{\mu'}}{\partial k_\nu} = f_\mu(k_\nu) : f_{\mu'}(k_\nu), \quad \frac{\partial \mathfrak{x}_\mu}{\partial \mathfrak{k}_\nu} : \frac{\partial \mathfrak{x}_{\mu'}}{\partial \mathfrak{k}_\nu} = \mathfrak{f}_\mu(\mathfrak{k}) : \mathfrak{f}_{\mu'}(\mathfrak{k}_\nu).$$

Integrale dritter Gattung.

§ 41. Integrale dritter Gattung können auf zweierlei Weise gebildet werden. Einmal nämlich ist

$$\int_{s', z'}^{s'', z''} t(s, z;\ s_1, z_1)\, dz$$

als Function von s_1, z_1 ein Ausdruck, der in den Puncten s', z' und s'', z'' wie $\lg z - z''$ bez. $-\lg z - z'$ unendlich wird, zu beiden Seiten einer durch T' laufenden Linie um $2i\pi$ verschiedene Werthe annimmt und an den Querschnitten a und $\bar{a}$ den Periodicitätsmodul Null hat. Eine solche Function bezeichnet man mit $\pi(s', z';\ s'', z'';\ s_1, z_1)$. Dass diese Function die erwähnten Eigenschaften besitzt, folgt am einfachsten aus ihrer Darstellung durch ϑ-Functionen, wobei sich auch ergiebt, dass sie als Function von $s', z';\ s'', z''$ sich ganz ähnlich verhält. Hieraus folgt im Grunde die zweite Form der Integrale dritter Gattung.

Es ist bekannt, dass ein logarithmisches Integral in mindestens zwei Puncten der Fläche T' unendlich werden muss. Sind diese Puncte $s_1, z_1;\ s_2, z_2$ so ist das Integral

$$\int_{s_0, z_0}^{s, z} \frac{\begin{vmatrix} R, & s\mathfrak{P}, & s^2\mathfrak{P}, & \mathfrak{s}P, & \mathfrak{s}^2P \\ R_1, & s_1\mathfrak{P}_1\tau, & s_1^2\mathfrak{P}_1\tau^2, & \mathfrak{s}_1P_1\tau^2, & \mathfrak{s}_1^2P_1\tau \\ R_1, & s_1\mathfrak{P}_1\tau^2, & s_1^2\mathfrak{P}_1\tau, & \mathfrak{s}_1P_1\tau, & \mathfrak{s}_1^2P_1\tau^2 \\ R_2, & s_2\mathfrak{P}_2\tau, & s_2^2\mathfrak{P}_2\tau^2, & \mathfrak{s}_2P_2\tau^2, & \mathfrak{s}^2P_2\tau \\ R_2, & s_2\mathfrak{P}_2\tau^2, & s_2^2\mathfrak{P}_2\tau, & \mathfrak{s}_2P_2\tau, & \mathfrak{s}^2P_2\tau^2 \end{vmatrix}}{(z - z_1)(z - z_2)R}\, dz$$

eine Function die sich von $\pi(s_1, z_1;\ s_2, z_2,\ s, z)$ nur durch einen constanten (von sz unabhängigen) Factor und ein Integral erster Gattung unterscheiden kann.

Das Integral

$$\int_{s_0, z_0}^{s, z} S(s_1, z_1;\ s, z)\, dz$$

wird im Puncte s_1, z_1 und in den drei unendlich fernen Puncte logarithmisch unendlich.

Digitized by Google

Das Integral

$$\int_{s_1, z_0}^{s, z} \frac{s_1 F(z_1) \overset{n}{\mathfrak{F}}(z) - s F(z) \overset{n}{\mathfrak{F}}(z_1)}{(z - z_1) s^2 \mathfrak{P}} dz$$

wird in den beiden übereinander liegenden Puncten τs_1, z_1 und $\tau^2 s_1$, z_1 logarithmisch unendlich, und ist eines der einfachsten Integrale dritter Gattung, obgleich es $2n+2$ willkürliche Constante, die Coefficienten von F und $\mathfrak{F}$ enthält. Ist $z_1 = \infty$ so geht dies Integral über in das andere

$$\int_{s_0, z_0}^{s, z} \frac{(\tau^\mu - s) \overset{n}{F}(z)}{s^2 \mathfrak{P}} dz \quad \text{oder in} \quad \int_{s_0, z_0}^{s, z} \frac{(\tau^\mu - s) \overset{n}{F}(z)}{s^2 P} dz$$

worin μ eine ganze Zahl ist. Um wieder $2n+2$ oder ausser einer additiven $2n+1$ willkürliche Constante zu erhalten, braucht man nur ein Integral erster Gattung hinzuzufügen, wodurch der Charakter der Integrale dritter Gattung nicht geändert wird.

Einige dreiwerthige algebraische Functionen.

§ 42. Unter den in T mehrwerthigen in T^ν einwerthigen algebraischen Functionen zeichnen sich besonders diejenigen aus, die sich zu beiden Seiten der Querschnitte nur um Factoren unterscheiden, die Wurzeln der Einheit sind. Gewisse ganze Potenzen solcher Functionen sind in T einwerthig. Zur Construktion solcher Functionen ist im Allgemeinen die Auflösung complicirter algebraischer Gleichungen erforderlich, welcher Umstand es gerade ist, der in die allgemeine Theorie der Abel'schen Functionen Schwierigkeiten bringt. Für unsere specielle Fläche aber bietet sich eine Klasse von einfachen Functionen dar, deren dritte Potenzen in T einwerthig sind, und die die Lösung des Umkehrproblems möglich machen. Nämlich Functionen von der Form

$$\sqrt[3]{\frac{(z-\varkappa_1)(z-\varkappa_2)\ldots(z-\varkappa_m)}{(z-\varkappa_1')(z-\varkappa_2')\ldots(z-\varkappa_{m'}')}},$$

worin $\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_m \varkappa_1' \ldots \varkappa_{m'}'$ Verzweigungspuncte k und $\mathfrak{k}$ sind, die auch unter einander gleich sein können. Die Zahlen m und m' aber müssen entweder einander gleich sein, oder sich nur um ganze Multipla von 3 unterscheiden. Da das Charakteristische dieser Functionen nicht gestört wird, wenn man eine in T einwerthige Function als Factor hinzufügt, so kann der letzte Fall als specieller des ersten angesehen werden, den man bei gleichen m und m' erhält, wenn man entweder im Zähler oder im Nenner drei oder sechs u. s. w. Factoren auf gleiche Verzweigungspuncte fallen lässt. Wir betrachten zuerst die Function

$$\sqrt[3]{(z-k_\mu):(z-\mathfrak{k}_\mu)} = [k_\mu, \mathfrak{k}_\mu], \quad \mu < n+1.$$

In der Nähe der beiden Verzweigungspuncte k_μ und $\mathfrak{k}_\mu$ und längs der zugehörigen Durchsetzungslinie verhält sich die Function wie s. Ich meine, sie unterscheidet sich im zweiten und dritten Blatt von ihrem Werthe im ersten Blatte bez. durch die Factoren τ und τ^2. Führt man aber den Punct s, z über irgend eine andere Durchsetzungslinie $k_{\mu'}$ $\mathfrak{k}_{\mu'}$ hinweg in ein anderes Blatt, so bleibt die Function ungeändet, weil sie sich in keinem andern Verzweigungspuncte ausser k_μ und $\mathfrak{k}_\mu$ verzweigt. Führt man z. B. den Punct s, z längs a_μ von der negativen Seite von b_μ auf die positive, so wird dabei der Punct $\mathfrak{k}_\mu$ in positiver Richtung umkreist, und die Function hat also den Factor τ^2 gewonnen. Demnach unterscheidet sich $[k_\mu, \mathfrak{k}_\mu]$ auf dem positiven Ufer von b_μ durch den Factor τ^2 von ihrem Werthe auf dem negativen, so dass sie dort $\tau^2[k_\mu, \mathfrak{k}_\mu]$ ist, wenn sie $[k_\mu, \mathfrak{k}_\mu]$ auf dem negativen Ufer war. In gleicher Weise findet man, dass sie bei $\overline{b_\mu}$ auf dem positiven Ufer ebenfalls $\tau^2[k_\mu, \mathfrak{k}_\mu]$ ist, wenn sie gleich $[k_\mu, \mathfrak{k}_\mu]$ auf dem negativen war. Zu beiden Seiten aller übrigen Querschnitte hat die Function gleiche Werthe.

Die Function

$$\sqrt[3]{(z-\mathfrak{k}_\mu):(z-k_\mu)} = [\mathfrak{k}_\mu, k_\mu], \quad \mu < n+1,$$

Digitized by Google

die reciproke der vorigen, gewinnt beim Uebergang über b_μ den Factor τ, bei $\overline{b_\mu}$ ebenfalls, und ist sonst allenthalben stetig. Dies folgt aus der Gleichung

$$[k_\mu, \mathfrak{k}_\mu] \cdot [\mathfrak{k}_\mu, k_\mu] = 1.$$

Eine besondere Betrachtung machen die Functionen $[k_{n+1}, \mathfrak{k}_{n+1}]$ und $[\mathfrak{k}_{n+1}, k_{n+1}]$ nöthig, weil um die Durchsetzungslinie $k_{n+1}\,\mathfrak{k}_{n+1}$ kein Querschnitt gezogen ist. Da aber

$$[k_{n+1}, \mathfrak{k}_{n+1}] = s \cdot [\mathfrak{k}_1, k_1] \cdot [\mathfrak{k}_2, k_2] \ldots [\mathfrak{k}_n, k_n]$$
$$[\mathfrak{k}_{n+1}, k_{n+1}] = \mathfrak{s} \cdot [k_1, \mathfrak{k}_1] \cdot [k_2, \mathfrak{k}_2] \ldots [k_n, \mathfrak{k}_n]$$

ist, so sieht man sofort ein, dass die erste Functien den Factor τ gewinnt, wenn man (s, z) über einen der Schnitte $b_1, b_2 \ldots b_n$ oder $\overline{b_1}, \overline{b_2} \ldots b_n$ vom negativen zum positiven Ufer führt, und sonst stetig bleibt, die zweite aber beim Ueberschreiten der Querschnitte $b_1 \ldots \overline{b_2} \ldots \overline{b_n}$ den Factor τ^2 gewinnt, und sonst stetig bleibt.

§ 43. Weiter betrachten wir die Function

$$\sqrt[3]{(z-\mathfrak{k}_\mu):(z-k_{\mu+1})} = [\mathfrak{k}_\mu, k_{\mu+1}], \quad \mu < n.$$

Wenn man von der positiven Seite von a_μ zwischen $\mathfrak{k}_\mu$ und $k_{\mu+1}$ hindurch den Punct s, z um k_μ und $\mathfrak{k}_\mu$ gleichzeitig positiv herumführt, etwa längs b_μ, so dass man immer im ersten Blatte bleibt, so gewinnt die Function $[\mathfrak{k}_\mu, k_{\mu+1}]$ den Factor τ. Dabei ist man aufs negative Ufer von a_μ gelangt, so dass die Function auf dem positiven Ufer von a_μ von ihrem Werthe auf dem negativen sich durch den Factor τ^2 nnterscheidet. Führt man s, z längs $b_{\mu+1}$ vom negativen Ufer von $a_{\mu+1}$ auf das positive, so geht man um $k_{\mu+1}$ negativ herum und die Function gewinnt daher den Factor τ. Eine ähnliche Betrachtung lehrt, dass der Werth derselben Function auf dem positiven Ufer von $\bar{a}_\mu$ $\tau[\mathfrak{k}_\mu, k_{\mu+1}]$ ist, wenn er auf dem negativen $[\mathfrak{k}_\mu, k_{\mu+1}]$ war, auf dem positiven Ufer von $\bar{a}_{\mu+1}$ aber $\tau^2[\mathfrak{k}_\mu, k_{\mu+1}]$ wenn er auf dem negativen $[\mathfrak{k}_\mu, k_{\mu+1}]$ war. An allen übrigen Querschnitten ist die Function stetig.

Die Function $[\mathfrak{k}_n, k_{n+1}]$ gewinnt beim Ueberstreichen des Querschnittes a_n den Factor τ^2 bei $\bar{a}_n$ den Factor τ und ist sonst stetig. Die Function $[\mathfrak{k}_{n+1}, k_1]$ gewinnt beim Ueberschreiten des Querschnittes a_1 den Factor τ bei $\bar{a}_1$ den Factor τ^2. Die Periodicität der Functionen $[k_{\mu+1}, \mathfrak{k}_\mu] = \sqrt[3]{(z-k_{\mu+1}):(z-\mathfrak{k}_\mu)}$ ergiebt sich aus der Gleichung $[k_{\mu+1}, \mathfrak{k}_\mu] \cdot [\mathfrak{k}_\mu, k_{\mu+1}] = 1$.

§ 44. Aus den bisher betrachteten speciellen dreiwerthigen Functionen, lassen sich durch Multiplication alle Functionen von der oben erwähnten Form

$$\sqrt[3]{(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_m):(z-x'_1)(z-x'_2)\ldots(z-x'_{m'})}$$

zusammensetzen. Z. B. wenn $\nu > \mu$ ist

$$\sqrt[3]{(z-k_\mu):(z-\mathfrak{k}_\nu)} = [k_\mu, \mathfrak{k}_\nu] = [k_\mu, \mathfrak{k}_\mu]\,[\mathfrak{k}_\mu, k_{\mu+1}]\,[k_{\mu+1}, \mathfrak{k}_{\mu+1}] \ldots [\mathfrak{k}_\nu, k_\nu],$$

$$\sqrt[3]{(z-\mathfrak{k}_\mu):(z-k_\nu)} = [\mathfrak{k}_\mu, k_\nu] = [\mathfrak{k}_\mu, k_{\mu+1}]\,[k_{\mu+1}, \mathfrak{k}_{\mu+1}]\,[\mathfrak{k}_{\mu+1}, k_{\mu+1}] \ldots [\mathfrak{k}_{\nu-1}, k_\nu].$$

Ist $\nu < \mu$ so führt man diesen Fall dadurch auf einen früheren zurück, dass man den reciproken Werth untersucht.

Die Periodicität der Function

$$\sqrt[3]{(z-k_\mu):(z-k_{\mu'})} = [k_\mu, k_{\mu'}] = [k_\mu, \mathfrak{k}_\varrho]\,[\mathfrak{k}_\varrho, k_{\mu'}]$$

ergiebt sich aus der Periodicität der Factoren des letzten Produktes. Aehnlich die der Function

$$[\mathfrak{k}_\mu, \mathfrak{k}_{\mu'}] = [\mathfrak{k}_\mu, k_\varrho]\,[k_\varrho, \mathfrak{k}_{\mu'}].$$

Ferner ist

$$\sqrt[3]{(z-k_\mu)(z-k_{\mu'})(z-k_{\mu''})} = [k_\mu, \mathfrak{k}_\varrho] \cdot [k_{\mu'}, \mathfrak{k}_\varrho]\,[k_{\mu'}, \mathfrak{k}_\varrho] \cdot (z-\mathfrak{k}_\varrho).$$

Aus diesen Beispielen erkennt man ohne Weiteres die Richtigkeit des oben ausgesprochenen Satzes.

§ 45. Man kann so in T' einwerthige Functionen herstellen, die sich an den beiden Seiten der Querschnitte $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_n, b_n$ um beliebige gegebene Factoren $1, \tau, \tau^2$ unterscheiden. Diese Functionen unterscheiden sich dann zu beiden Seiten der Querschnitte $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \ldots \overline{b_n}$ um dieselben Factoren, als an den

Digitized by Google

entsprechenden $b_1, b_2, \ldots b_n$, zu beiden Seiten der Querschnitte $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$ aber immer um die reciproken als an den entsprechenden $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Da die Functionen $[k_\mu, \mathfrak{k}_\mu]$ und $[\mathfrak{k}_\mu, k_\mu]$ an dem Schnitt b_μ den Factor τ bez. τ^2 haben, und den reciproken bei $\overline{b_\mu}$, sonst stetig sind, so kann man offenbar aus Produkten solcher Functionen jedwede Functionen herstellen, die an den Schnitten $b_1\, b_2 \ldots b_n$ vorgegebene Factoren τ, τ^2 haben, an den Schnitten $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \ldots \overline{b_n}$ bez. eben dieselben, und sonst stetig sind. Construirt man noch Functionen, die bei a_μ ebenfalls wie man will den Factor τ oder τ^2 haben, bei $\bar{a}_\mu$ den reciproken, und sonst stetig sind, so kann man offenbar jedwede Function durch ein Produkt darstellen, die bei a und b beliebig gegebene Factoren τ oder τ^2 haben, an den entsprechen $\overline{a}$ die reciproken, den entsprechenden $\overline{b}$ die gleichen, und sonst stetig sind.

Solche Functionen sind aber

$$[\mathfrak{k}_n, k_{n+1}], \quad [\mathfrak{k}_n, k_{n+1}] \,.\, [\mathfrak{k}_{n-1}, k_n],$$
$$[\mathfrak{k}_n, k_{n+1}] \,.\, [\mathfrak{k}_{n-1}, k_n] \,.\, [\mathfrak{k}_{n-2}, k_{n-1}],$$
$$[\mathfrak{k}_n, k_{n+1}] \,.\, [\mathfrak{k}_{n-1}, k_n] \,.\, [\mathfrak{k}_{n-2}, k_{n-1}] \,.\, [\mathfrak{k}_{n-3}, k_{n-2}], \ldots .$$

welche Beziehungsweise an den Schnitten a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, den Factor τ^2 bei $\bar{a}_n$, $\bar{a}_{n-1}$, $\bar{a}_{n-2}$ den Factor τ haben und sonst stetig sind. Die reciproken dieser Functionen haben bei a_n, $a_{n-1} \ldots$ bez. den Factor τ bei $\bar{a}_n$, $\bar{a}_{n-1} \ldots$ den Factor τ^2. Damit ist die Richtigkeit unserer Behauptung erwiesen.

Die Construktion ähnlicher Functionen, die sich zu beiden Seiten der Querschnitte a, b, $\overline{a}$, $\overline{b}$ um beliebig aus τ, τ^2 gegebene Factoren unterscheiden, würde die Auflösung höherer algebraischer Gleichungen erfordern.

§ 46. **Einige allgemeinere dreiwerthige Functionen.** Die bisher betrachteten in T dreiwerthigen Functionen, deren dritte Potenzen einwerthig sind, wurden nur in Verzweigungspuncten Null und Unendlich. Man kann aber mit Hilfe derselben leicht Functionen construiren, welche an den Schnitten a, b, beliebige Factoren τ, τ^2 haben, an den entsprechenden $\overline{a}$ die reciproken, $\overline{b}$ die gleichen, und welche in p beliebig vorgegebenen Puncten der Fläche T unendlich werden. Wenn die Periodicität dieser Function die der Function $[k_\mu, \mathfrak{k}_\nu]$ ist, so ist eine solche Function

$$\sqrt[3]{\frac{z-k_\mu}{z-\mathfrak{k}_\nu} \cdot \frac{z_1-k_\mu}{z_1-\mathfrak{k}_\nu} \cdots \frac{z_p-k_\mu}{z_p-\mathfrak{k}_\nu}} \cdot \Phi(s, z;\ s_1, z_1;\ \ldots\ s_p, z_p;\ k_\mu;\ |\ \mathfrak{k}_\nu)$$

wenn Φ die im § 8 definirte Function bedeutet. Diese Function enthält ausser einem willkürlichen Factor keine Constante, wenn nicht drei von dem Puncte $s_1, z_1; \ldots s_p, z_p$ in T übereinander liegen, in welchem Falle die Function noch eine Constante enthalten wird. Oder überhaupt, es enthält die Function dann noch eine oder mehrere willkürliche Constante, wenn die Lage der Puncte $s_1, z_1, \ldots s_p, z_p, k_\mu$ eine solche ist, dass es eine einwerthige Function giebt, die in p oder weniger von diesen Puncten unendlich gross erster Ordnung wird. Die Function Φ ist dann der Quotient zweier φ-Functionen, und es findet dies nur für besondere Lagen der s_ν, z_ν statt.

Im Theil II wird sich zeigen, dass diese Function eine ganz ähnliche Function von $s_1, z_1;\ s_2, z_2; \ldots s_p, z_p$ als von s, z ist, was man so nicht leicht erkennt. Wenn die Puncte $s_1, s_2; \ldots s_p, z_p$; paarweise in der Fläche T übereinander liegen, so kann eine Function mit der Periodicität von $\sqrt[3]{(z-x):(z-x')}$ durch die in § 12 definirte Function Ψ hergestellt werden, nämlich die Function

$$\sqrt[3]{\left(\frac{z-x'}{z-x} \cdot \frac{z_1-x'}{z_1-x} \cdots \frac{z_n-x'}{z_n-x}\right)^2} \cdot \Psi(z, z_1, z_2 \ldots z_n, x' \mid x)$$

von welcher man sogleich die Symmetrie in Bezug auf die $z, z_1, z_2 \ldots z_p$ erkennt.

Der Fall $n = 1$.

§ 47. Der einfachste Fall ist der, in welchem $n = 1$, $p = 2$ ist. Dann kann man auch leicht diejenigen Functionen herstellen, deren Quadrate in T einwerthig sind, die eigentlichen Abel'schen Functionen im engern Sinne. Die Functionen φ sind dann in der Form $C(s - s_1)$ enthalten, man hat also blos zu untersuchen, für welche Werthe von s_1 diese Gleichung doppelte Wurzeln hat. Die Gleichungen

Digitized by Google

$$s-s_1 = 0,\ s = s_1,\ (z-k_1)(z-k_2) : (z-\mathfrak{k}_1)(z-\mathfrak{k}_2) = (z_1-k_1)(z_1-k_2) : (z_1-\mathfrak{k}_1)(z_1-\mathfrak{k}_2)$$
$$(z-k_1)\,.\,(z-k_2)\,.\,(z_1-\mathfrak{k}_1)\,.\,(z_1-k_2) - (z-\mathfrak{k}_1)\,.\,(z-\mathfrak{k}_2)\,.\,(z_1-k_1)\,.\,(z-k_2) = 0$$

sind natürlich für $z = z_1$ erfüllt. Damit sie aber eine doppelte Wurzel haben, muss auch der Differentialquotient

$$(2z-k_1-k_2)\,(z_1-\mathfrak{k}_1)\,(z_1-\mathfrak{k}_2) - (2z-\mathfrak{k}_1-\mathfrak{k}_2)\,(z_1-k_1)\,(z_1-k_2)$$

für $z = z_1$ verschwinden, was eine Gleichung vom zweiten Grade giebt, weil die höchste Potenz sich fort-hebt, und für $z_1 = \infty$, $s-\tau^\mu$ nicht unendlich klein zweiter Ordnung wird. Ordnet man nach Potenzen von z_1, so erhält man

$$z_1^2(k_1+k_2+\mathfrak{k}_1+\mathfrak{k}_2) + 2z_1(\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2 - k_1\,k_2) + k_1\,k_2(\mathfrak{k}_1+\mathfrak{k}_2) - \mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2(k_1+k_2) = 0.$$

Den beiden Wurzeln dieser Gleichung entsprechen je drei verschiedene Werthe von s_1, so dass es also sechs Functonen φ giebt, die in einem Punct unendlich klein zweiter Ordnung werden, und deren Quotienten Abelsche Functionen im engern Sinne sind.

Nimmt man s als unabhängige Veränderliche so ist die Irrationalität z durch die Gleichung

$$z^2(1-s^3) - z\big((k_1+k_2) - (\mathfrak{k}_1+\mathfrak{k}_2)s^3\big) + k_1\,k_2 - \mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2 s^3 = 0$$

bestimmt, und ist zweiwerthig. Diese Function ist demnach wie eine zweiwerthige, über der s-Ebene ausgebreitete Riemann'sche Fläche verzweigt, die schon anderweitig behandelt ist.

Die dreiwerthigen Functionen die in zwei Verzweigungspuncten unendlich gross und klein erster Ordnung werden oder in einem zweiter Ordnung sind durch die vier folgenden darstellbar

$$\sqrt[3]{\left(\frac{z-k_1}{z-\mathfrak{k}_1}\right)^2},\ \sqrt[3]{\left(\frac{z-k_2}{z-\mathfrak{k}_1}\right)^2},\ \sqrt[3]{\left(\frac{z-k_1}{z-\mathfrak{k}_2}\right)^2},\ \sqrt[3]{\left(\frac{z-k_2}{z-\mathfrak{k}_2}\right)^2}.$$

Da hier nur ein Schnitt a und ein Schnitt b vorhanden ist, so können die Factoren $1, \tau, \tau^2$ auf acht verschiedene Arten gewählt werden, weil die neunte Combination (der Factor 1 bei a und bei b) auf einwerthige Functionen führt. Die acht dreiwerthigen Functionen sind die vier eben aufgestellten, und ihre reciproken.

Die Periodicitätsmoduln der überall endlichen Integrale sind in diesem Falle folgende

bei b,	bei $\overline{b}$;	bei b,	bei $\overline{b}$,
ist der von $u = a$,	$= -\frac{1}{2}a$; ist der von $u = -\frac{1}{2}a$,	$= a$,	

wie die Gleichungen des § 26 ergeben. In Folge eines allgemeinen von Roch (Schlömilich's Zeitschrift Jahrgang 111 pag. 463 1866) gegebenen Satzes kann man die Integrale mit der Irrationalität s auf elliptische Integrale mittels Transformation zurückführen.

Die Reduktion geschieht nach bekannten Methoden. Es ist nämlich

$$\int \frac{(A+Bs)\,dz}{(z-\mathfrak{k}_1)(z-\mathfrak{k}_2)s^2} = \int \frac{(A+Bs)\,ds}{\sqrt{(s^3-s_1^3)(s^3-s_2^3)}}$$

wenn s_1, s_2 diejenigen Werthe von s sind, in denen eine Function φ unendlich klein zweiter Ordnung wird. Setzt man nun

$$\frac{s}{\sqrt{s_1\,s_2}} + \frac{\sqrt{s_1\,s_2}}{s} = 2\sigma,\quad \frac{s}{\sqrt{s_1\,s_2}} = \sigma+\sqrt{\sigma^2-1},\quad \frac{\sqrt{s_1\,s_2}}{s} = \sigma-\sqrt{\sigma^2-1},\quad \frac{s_1^3+s_2^3}{\sqrt{s_1^3\,s_2^3}} = \omega,$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{s_1\,s_2}}{s}} = \frac{\sqrt{\sigma-1}-\sqrt{\sigma+1}}{\sqrt{2}},\quad d\sqrt{\frac{\sqrt{s_1\,s_2}}{s}} = \frac{-d\frac{s}{\sqrt{s_1\,s_2}}}{\sqrt{\left(\frac{s}{\sqrt{s_1\,s_2}}\right)^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma-1}} - \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma+1}}\right),$$

$$\sqrt{s^6-(s_1^3+s_2^3)s^3+s_1^3s_2^3} = \sqrt{s_1^3s_2^3}\cdot\sqrt{\left(\frac{s}{\sqrt{s_1\,s_2}}\right)^3}\cdot\sqrt{\left(\frac{s}{\sqrt{s_1\,s_2}}\right)^3} + \left(\frac{\sqrt{s_1\,s_2}}{s}\right)^3 - \omega,$$

so folgt

Digitized by Google

$$\int \frac{(A+Bs)\,ds}{\sqrt{s^3-s_1^3\,.\,s^3-s_2^3}} = -\int \frac{\{A+B\sqrt{s_1 s_2}\,(\sigma+\sqrt{\sigma-1}\,\sqrt{\sigma+1})\}\sqrt{\frac{s_1 s_2}{2}}}{\sqrt{s_1^3 s_2^3}\sqrt{8\sigma^3-6\sigma-\omega}}\left(\frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma-1}}-\frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma+1}}\right)$$

$$=\int \frac{(A+B\sqrt{s_1 s_2}\,\sigma)\sqrt{\frac{s_1 s_2}{2}}\,d\sigma}{\sqrt{s_1^3 s_2^3}\sqrt{\sigma+1}\sqrt{8\sigma^3-6\sigma-\omega}}-\int \frac{(A+B\sqrt{s_1 s_2}\,\sigma)\sqrt{\frac{s_1 s_2}{2}}\,d\sigma}{\sqrt{s_1^3 s_2^3}\sqrt{8\sigma^3-6\sigma-\omega}\sqrt{\sigma-1}}$$

$$+\int \frac{B\sqrt{\sigma-1}\,d\sigma}{\sqrt{2s_1 s_2}\sqrt{8\sigma^3-6\sigma-\omega}}-\int \frac{B\sqrt{\sigma+1}\,d\sigma}{\sqrt{2s_1 s_2}\sqrt{8\sigma^3-6\sigma-\omega}}$$

$$=\int \frac{(A-B)\,d\sigma}{\sqrt{2s_2}\sqrt{\sigma+1}\sqrt{8\sigma^3-6\sigma-\omega}}-\int \frac{(A+B)\,d\sigma}{\sqrt{2s_2}\sqrt{\sigma-1}\sqrt{8\sigma^3-6\sigma-\omega}}$$

was ein Aggregat von elliptischen Integralen ist.

§ 48. Die Abel'schen Integrale genügen stets gewissen „completen" Differentialgleichungen, und ihre Periodicitätsmoduln „reducirten" Differentialgleichungen. Es soll hier nur eine solche Gleichung für den Fall $n = 1$, wenn das Integral von der ersten Gattung ist, hergeleitet werden. Ist

$$w = \int \frac{dz}{s\,.\,\mathfrak{P}} = \int \frac{dz}{\sqrt[3]{z-k_1\,.\,z-k_2\,.\,(z-\mathfrak{k}_1)^2\,(z-\mathfrak{k}_2)^2}}$$

so ist

$$\begin{vmatrix} w, & \frac{dw}{dk_1}, & \frac{d^2w}{d^2k_1} \\ A, & \frac{dA}{dk_1}, & \frac{d^2A}{d^2k_1} \\ B, & \frac{dB}{dk_1}, & \frac{d^2B}{d^2k_1} \end{vmatrix}$$

eine einwerthige Function in T, die nur für $z = k_1$ und zwar in der vierten Ordnung unendlich wird.

Da diese Function in den Puncten $k_2, \mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$ verschwindet, so ist sie gleich

$$C.\mathfrak{s}.z-k_2 : z-k_1 = \chi(s,z)$$

und

$$\frac{d\chi}{dz} = C\,\mathfrak{s}\,\frac{k_2-k_1}{(z-k_1)^2}+C\tfrac{1}{3}\,\frac{z-k_2}{z-k_1}\,s^2\frac{\mathfrak{P}'P-P'\mathfrak{P}}{P^2}$$

$$= C\,\mathfrak{s}\,\frac{k_2-k_1}{(z-k_1)^2}+\tfrac{1}{3}\,C\frac{z-k_2}{z-k_1}\,\mathfrak{s}\,\frac{\mathfrak{P}'P-P'\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}P}.$$

Setzen wir nun

$$\begin{vmatrix} \frac{dA}{dk_1}, & \frac{d^2A}{dk_1^2} \\ \frac{dB}{dk_1}, & \frac{d^2B}{dk_1^2} \end{vmatrix} = C\,.\,L, \quad \begin{vmatrix} \frac{d^2A}{dk_1^2}, & A \\ \frac{d^2B}{dk_1^2}, & B \end{vmatrix} = C\,.\,M, \quad \begin{vmatrix} A, & \frac{dA}{dk_1} \\ B, & \frac{dB}{dk_1} \end{vmatrix} = C\,.\,N$$

so erhalten wir die Differentialgleichung

$$L\frac{d^2w}{dk_1^2}+M\frac{dw}{dk_1}+Nw = \frac{\mathfrak{s}(z-k_2)}{z-k_1};$$

woraus durch Differentiation nach z und Multiplication mit $9(z-k_1)^2 s\mathfrak{P}$ erhalten wird

$$4L+3M(z-k_1)+9N(z-k_1)^2 = 9(k_2-k_1)\mathfrak{P}+3(\mathfrak{P}'P-P'\mathfrak{P}).$$

Für $z = k_1$ ergiebt sich

$$4L = -9R'(k_1)-3P'(k_1)\,\mathfrak{P}(k_1) = -12R'(k_1).$$

Durch Differentiation erhält man weiter

$$3M+18N(z-k_1) = 9(k_2-k_1)\mathfrak{P}'+3(\mathfrak{P}''P-P''\mathfrak{P})$$

und für $z = k_1$

$$3M = 9(k_2-k_1)\,P'(k_1)-6\mathfrak{P}(k_1) = 18(k_2-k_1)\,(2k_1-\mathfrak{k}_1-\mathfrak{k}_2)-6(k_1-\mathfrak{k}_1)\,(k_1-\mathfrak{k}_2)$$

Digitized by Google

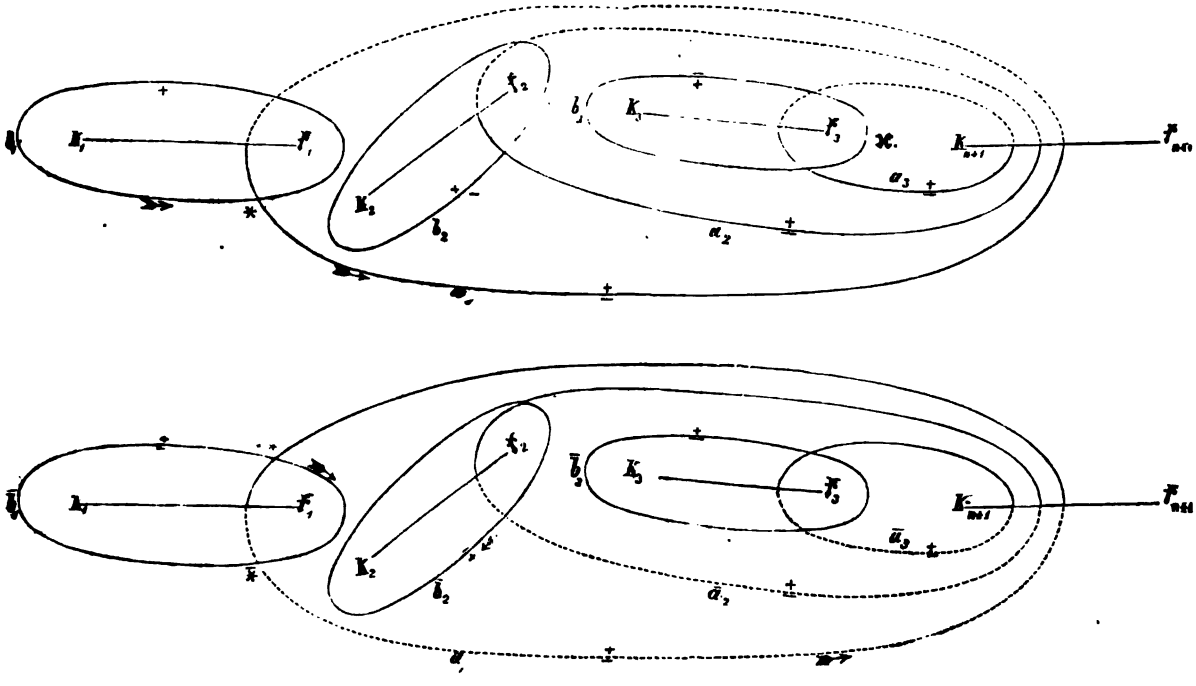
Differentzirt man nochmals so folgt

$$18N = 18\,.\,(k_2-k_1)+3(\mathfrak{P}''P'-P''\mathfrak{P}') = 18(k_2-k_1)+6(\mathfrak{k}_1+\mathfrak{k}_2-k_1-k_2).$$

Also ist die Differentialgleichung zu schreiben

$$3(k_2-k_1)\,(\mathfrak{k}_1-k_1)\,(\mathfrak{k}_2-k_1)\,\frac{d^2w}{dk_1^2}+\left[6(k_2-k_1)\,(2k_1-\mathfrak{k}_1-\mathfrak{k}_2)-2(k_1-\mathfrak{k}_1)\,(k_1-\mathfrak{k}_2)\right]\frac{dw}{dk_1}$$
$$+\left[(k_2-k_1)+\tfrac{1}{4}(\mathfrak{k}_1+\mathfrak{k}_2-k_1-k_2)\right]w = \vartheta(z-k_2):(z-k_1).$$

Setzt man rechts Null statt der Function, so genügen dieser Gleichung die Periodicitätsmoduln A und B.



II.

Darstellung Abel'scher Functionen und Integrale durch Theta-Functionen.

Bezeichnung und Periodicität der Theta-Functionen.

§ 1. Die allgemeinen ϑ-Functionen werden durch die Gleichung definirt

$$\vartheta(v_1, v_2, \ldots v_p) = \left(\sum_{-\infty}^{\infty}\right)^p e^{\sum_1^p \sum_1^p a_{\nu\nu'} m_\nu m_{\nu'} + 2\sum_1^p v_\nu m_\nu},$$

worin sich die äussern Summen auf die Grössen $m_1, m_2, \ldots m_p$, welche alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu durchlaufen haben, beziehen, die im Exponenten aber auf die Indices ν, ν' welche alle ganzzahligen Werthe von 1 bis p anzunehmen haben. Es soll auch in diesem Theile der Buchstabe ν oder ν' etc. als Summationsbuchstabe gelten wo nichts besonderes bemerkt ist. — Hier werden wir nun

$$v_{n+1} = v_1, \quad v_{n+2} = v_2, \ldots v_p = v_n, \quad m_{n+1} = \mathfrak{m}_1, \quad m_{n+2} = \mathfrak{m}_2, \ldots m_p = \mathfrak{m}_n$$

und $\mu \leqq n$

$$a_{\mu, n+\mu'} = \overline{a}_{\mu\mu'}, \quad a_{\mu+n, \mu'} = a_{\mu\mu'}, \quad a_{\mu+n, \mu'+n} = \overline{a}_{\mu\mu'},$$

$$a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}, \quad \overline{a}_{\mu\mu'} = \overline{a}_{\mu'\mu}, \quad a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}, \quad a_{\mu'\mu} + a_{\mu\mu'} = -a_{\mu\mu'} = -\overline{a}_{\mu\mu'} = \overline{a}_{\mu\mu'} + \overline{a}_{\mu'\mu}$$

sestzen, woraus mit Einführung einer Abkürzung fliesst

$$f_{\nu\nu'}(m, \mathfrak{m}) = \sum_1^p \sum_1^p a_{\nu\nu'} m_\nu m_{\nu'} =$$

$$\sum_1^n \sum_1^n (a_{\nu\nu'} m_\nu m_{\nu'} + \overline{a}_{\nu\nu'} m_\nu \mathfrak{m}_{\nu'} + a_{\nu\nu'} \mathfrak{m}_\nu m_{\nu'} + \overline{a}_{\nu\nu'} \mathfrak{m}_\nu \mathfrak{m}_{\nu'}) =$$

$$\sum_1^n \sum_1^n a_{\nu\nu'} (m_\nu m_{\nu'} - m_\nu \mathfrak{m}_{\nu'} + \mathfrak{m}_\nu \mathfrak{m}_{\nu'}).$$

Ferner wollen wir hier die ϑ-Functionen im Allgemeinen kurz so bezeichnen, dass

$$\vartheta(v_\lambda; v_\lambda) = \left(\sum_{-\infty}^{\infty}_m\right)^n \left(\sum_{-\infty}^{\infty}_m\right)^n e^{f_{\nu\nu'}(m, \mathfrak{m}) + 2\sum_1^n (v_\nu m_\nu + v_\nu \mathfrak{m}_\nu)}$$

ist, so dass also der Buchstabe λ wie schon im ersten Theile in dieser Verbindung ein System andeutet, indem

$$(v_\lambda; v_\lambda) \text{ statt } (v_1, v_2, \ldots v_n, v_1, v_2, \ldots v_n)$$

geschrieben wird. Wenn es ohne die Deutlichkeit zu beeinträchtigen angeht, soll noch kürzer $(v_\lambda; .)$ für $(v_\lambda; v_\lambda)$ geschrieben werden.

Lässt man die Grössen $a_{11}\ a_{22} \ldots a_{nn}$ in ihren reellen Theilen negativ unendlich werden, während für ungleiche μ, μ' die Grössen $a_{\mu\mu'}$ und $a_{\mu\mu'}$ und ebenso die Grössen $v_\lambda; v_\lambda$ endlich bleiben, so nähert sich $\vartheta(v_\lambda; v_\lambda)$ dem Werthe Eins.

§ 2. Bedient man sich ferner der Bezeichnung

Digitized by Google

$$\vartheta\begin{matrix}h_1, h_2 \dots h_p \\ g_1, g_2 \dots g_p\end{matrix}(v_1, v_2, \dots v_p) = \left(\sum_{-\infty}^{\infty}{}_m\right)^p e^{\frac{1}{2}\sum_1^p\sum_1^p(2m_\nu+h_\nu)(2m_{\nu'}+h_{\nu'})a_{\nu\nu'}+\sum_1^p(2m_\nu+h_\nu)(v_\nu+\frac{1}{2}g_\nu i\pi)}$$

$$= \vartheta(\dots, v_\mu+\tfrac{1}{2}\sum_1^p a_{\mu\nu}+\tfrac{1}{2}g_\mu i\pi, \dots) e^{\frac{1}{2}\sum_1^p\sum_1^p h_\nu h_{\nu'} a_{\nu\nu'}+\frac{1}{2}\sum_1^p h_\nu g_\nu i\pi+\sum_1^p v_\nu h_\nu}$$

so werden wir hier zu schreiben haben

$$\vartheta\begin{matrix}h_1, h_2, \dots h_n, & \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \dots \mathfrak{h}_n \\ g_1, g_2, \dots g_n, & \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots \mathfrak{g}_n\end{matrix}(v_1, v_2, \dots v_n, \quad \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \dots \mathfrak{v}_n) = \vartheta\begin{matrix}h_\lambda; & \mathfrak{h}_\lambda \\ g_\lambda; & \mathfrak{g}_\lambda\end{matrix}(v_\lambda; \mathfrak{v}_\lambda)$$

$$= \left(\sum_{-\infty}^{\infty}{}_m\right)^n \left(\sum_{-\infty}^{\infty}{}_m\right)^n e^{\frac{1}{2}f_{\nu\nu'}(2m+h, 2\mathfrak{m}+\mathfrak{h})+\sum_1^n\{(2m_\nu+h_\nu)(v_\nu+\frac{1}{2}g_\nu i\pi)+(2\mathfrak{m}_\nu+\mathfrak{h}_\nu)(\mathfrak{v}_\nu+\frac{1}{2}\mathfrak{g}_\nu i\pi)\}}$$

$$= \vartheta(v_\lambda+\tfrac{1}{2}\sum_1^n(h_\nu a_{\lambda\nu}+\mathfrak{h}_\nu\bar{a}_{\lambda\nu})+\tfrac{1}{2}g_\lambda i\pi;\ \mathfrak{v}_\lambda+\tfrac{1}{2}\sum_1^n(h_\nu a_{\lambda\nu}+\mathfrak{h}_\nu\bar{a}_{\lambda\nu})+\tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_\lambda i\pi)\, e^{\chi},$$

$$\chi = \tfrac{1}{2}f_{\nu\nu'}(h, \mathfrak{h})+\tfrac{1}{2}\sum_1^n(h_\nu g_\nu+\mathfrak{h}_\nu\mathfrak{g}_\nu)i\pi+\sum_1^n(h_\nu v_\nu+\mathfrak{h}_\nu\mathfrak{v}_\nu).$$

Ist irgend ein h oder $\mathfrak{h}$ ungerade, so verschwindet $\vartheta\begin{matrix}h_\lambda; & \mathfrak{h}_\lambda \\ g_\lambda; & \mathfrak{g}_\lambda\end{matrix}(v_\lambda; \mathfrak{v}_\lambda)$ bei dem am Ende des vorigen Paragraphen besprochenen Grenzübergang. Die Grösse $\sum_1^n(h_\nu g_\nu+\mathfrak{h}_\nu\mathfrak{g}_\nu)$ heisst die Charakteristik der ϑ-Function, immer vorausgesetzt, dass die h, $\mathfrak{h}$, g, $\mathfrak{g}$ ganze Zahlen sind.

Eine ϑ-Function mit ungerader Charakteristik verschwindet mit den Argumenten. Ferner besteht (in Riemanns Ausdrucksweise) wenn die Charakteristik ungerade ist, nach dem System gleichzeitiger Periodicitätsmoduln a, $\bar{a}$, $\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ die Congruenz (R. pag. 148)

$$(\tfrac{1}{2}\sum_1^n(h_\nu a_{\lambda\nu}+\mathfrak{h}_\nu\bar{a}_{\lambda\nu})+\tfrac{1}{2}g_\lambda i\pi;\ \tfrac{1}{2}\sum_1^n(h_\nu\mathfrak{a}_{\lambda\nu}+\mathfrak{h}_\nu\bar{\mathfrak{a}}_{\lambda\nu})+\tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_\lambda i\pi) = (\sum_1^{p-1}u_\lambda(s_\nu, z_\nu);\ \sum_1^{p-1}u_\lambda(s_\nu, z_\nu))$$

wenn $s_1, z_1; s_2, z_2, \dots s_{p-1}, z_{p-1}$ $p-1$ Puncte der Fläche T sind, in denen eine Function φ unendlich klein zweiter Ordnung wird.

Ist $$(h_\lambda; \mathfrak{h}_\lambda) \equiv (h'_\lambda; \mathfrak{h}'_\lambda) \text{ (mod. 2)}, \quad (g_\lambda; \mathfrak{g}_\lambda) \equiv (g'_\lambda; \mathfrak{g}'_\lambda) \text{ (mod. 2)}$$

so ist

$$\vartheta\begin{matrix}h'_\lambda; & \mathfrak{h}'_\lambda \\ g'_\lambda; & \mathfrak{g}'_\lambda\end{matrix}(v_\lambda; \mathfrak{v}_\lambda) = \pm\vartheta\begin{matrix}h_\lambda; & \mathfrak{h}_\lambda \\ g_\lambda; & \mathfrak{g}_\lambda\end{matrix}(v_\lambda; \mathfrak{v}_\lambda).$$

§ 3. Die ϑ-Functionen genügen partiellen Differentialgleichungen. Es ist nämlich

$$\frac{\partial^2\vartheta\begin{matrix}h_1 h_2 \dots h_p \\ g_1 g_2 \dots g_p\end{matrix}(v_1, v_2 \dots v_p)}{\partial v_\mu\, \partial v_{\mu'}} = \frac{4\partial\vartheta\begin{matrix}h_1 h_2 \dots h_p \\ g_1 g_2 \dots g_p\end{matrix}(v_1, v_2 \dots v_p)}{\partial a_{\mu\mu'}},$$

wenn beim Differenziren $a_{\mu\mu'}$ von $a_{\mu'\mu}$ unabhängig gedacht wird. Führen wir die Bezeichnung des § 2 ein, so folgt mit Weglassung der Argumente

$$\frac{\partial^2\vartheta\begin{matrix}h_\lambda; & \mathfrak{h}_\lambda \\ g_\lambda; & \mathfrak{g}_\lambda\end{matrix}}{\partial v_\mu\, \partial v_{\mu'}} = \frac{4\partial\vartheta\begin{matrix}h_\lambda; & \mathfrak{h}_\lambda \\ g_\lambda; & \mathfrak{g}_\lambda\end{matrix}}{\partial a_{\mu\mu'}}, \quad \frac{\partial^2\vartheta\begin{matrix}h_\lambda; & \mathfrak{h}_\lambda \\ g_\lambda; & \mathfrak{g}_\lambda\end{matrix}}{\partial \mathfrak{v}_\mu\, \partial \mathfrak{v}_{\mu'}} = \frac{4\partial\vartheta\begin{matrix}h_\lambda; & \mathfrak{h}_\lambda \\ g_\lambda; & \mathfrak{g}_\lambda\end{matrix}}{\partial \bar{a}_{\mu\mu'}}$$

$$\frac{\partial^2\vartheta\begin{matrix}h_\lambda; & \mathfrak{h}_\lambda \\ g_\lambda; & \mathfrak{g}_\lambda\end{matrix}}{\partial v_\mu\, \partial \mathfrak{v}_{\mu'}} = \frac{4\partial\vartheta\begin{matrix}h_\lambda; & \mathfrak{h}_\lambda \\ g_\lambda; & \mathfrak{g}_\lambda\end{matrix}}{\partial \bar{a}_{\mu\mu'}} = \frac{\partial^2\vartheta\begin{matrix}h_\lambda; & \mathfrak{h}_\lambda \\ g_\lambda; & \mathfrak{g}_\lambda\end{matrix}}{\partial \mathfrak{v}_{\mu'}\, \partial v_\mu} = \frac{\partial\vartheta\begin{matrix}h_\lambda; & \mathfrak{h}_\lambda \\ g_\lambda; & \mathfrak{g}_\lambda\end{matrix}}{\partial \mathfrak{a}_{\mu'\mu}}$$

Setzen wir nun

$$v_\mu = x_\mu+\tau\mathfrak{x}_\mu : 1-\tau^2, \quad \mathfrak{v}_\mu = \tau x_\mu+\mathfrak{x}_\mu : 1-\tau^2$$

Digitized by Google

und betrachten die x und $\mathfrak{x}$ als unabhängige Veränderliche, und nehmen wir ferner an, dass die $a, \bar{a}, \mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}$ von den Grössen $x_{\mu\mu'}$ so abhängen, wie es in I. § 25 statuirt ist, so dass also

$$a_{\mu\mu'} = x_{\mu\mu'} + x_{\mu'\mu} : 1-\tau^2, \quad \mathfrak{a}_{\mu\mu'} = \tau x_{\mu\mu'} + \tau^2 x_{\mu'\mu} : 1-\tau^2, \quad \bar{a}_{\mu\mu'} = \mathfrak{a}_{\mu'\mu}, \quad \bar{\mathfrak{a}}_{\mu\mu'} = a_{\mu\mu'}$$

ist, und nehmen wir die $x_{\mu\mu'}$ beim Differenzen als von einander unabhängige Grössen an, so leiten wir aus den aufgestellten Differentialgleichungen leicht neue mit den Veränderlichen x_μ, $\mathfrak{x}_\mu$, $x_{\mu\mu'}$ ab. Zur Abkürzung werde hierbei H für $\vartheta^{h_\lambda;\, \mathfrak{h}_\lambda}_{g_\lambda;\, \mathfrak{g}_\lambda}(v_\lambda;\, \mathfrak{v}_\lambda)$ geschrieben. Dann ist

$$\frac{\partial H}{\partial x_{\mu\mu'}} = \left(\frac{\partial H}{\partial a_{\mu\mu'}} + \frac{\partial H}{\partial \bar{a}_{\mu\mu'}}\right)\frac{\partial a_{\mu\mu'}}{\partial x_{\mu\mu'}} + \left(\frac{\partial H}{\partial a_{\mu'\mu}} + \frac{\partial H}{\partial \bar{a}_{\mu'\mu}}\right)\frac{\partial a_{\mu'\mu}}{\partial x_{\mu\mu'}}$$
$$+ \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{a}_{\mu\mu'}} + \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{a}_{\mu'\mu}}\right)\frac{\partial \mathfrak{a}_{\mu'\mu}}{\partial x_{\mu\mu'}} + \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{a}_{\mu'\mu}} + \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{a}_{\mu\mu'}}\right)\frac{\partial \mathfrak{a}_{\mu\mu'}}{\partial x_{\mu\mu'}},$$

also

$$2(1-\tau^2)\frac{\partial H}{\partial x_{\mu\mu'}} = 2\frac{\partial H}{\partial a_{\mu\mu'}} + 2\frac{\partial H}{\partial \bar{a}_{\mu\mu'}} + 2\frac{\partial H}{\partial a_{\mu'\mu}} + 2\frac{\partial H}{\partial \bar{a}_{\mu'\mu}} + 2\tau^2\frac{\partial H}{\partial \bar{a}_{\mu\mu'}} + 2\tau^2\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{a}_{\mu'\mu}} + 2\tau\frac{\partial H}{\partial \bar{a}_{\mu'\mu}} + 2\tau\frac{\partial H}{\partial \bar{\mathfrak{a}}_{\mu\mu'}}$$
$$= \frac{\partial^2 H}{\partial v_\mu\, \partial v_{\mu'}} + \frac{\partial^2 H}{\partial \mathfrak{v}_\mu\, \partial \mathfrak{v}_{\mu'}} + \tau^2\frac{\partial^2 H}{\partial v_\mu\, \partial \mathfrak{v}_{\mu'}} + \tau\frac{\partial^2 H}{\partial \mathfrak{v}_\mu\, \partial v_{\mu'}}$$
$$= \frac{\partial}{\partial v_\mu}\left(\frac{\partial H}{\partial v_{\mu'}} + \tau^2\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}_{\mu'}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}_\mu}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}_{\mu'}} + \tau\frac{\partial H}{\partial v_{\mu'}}\right)$$
$$= (1-\tau^2)\frac{\partial}{\partial v_\mu}\left(\tau^2\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{x}_{\mu'}}\right) + (1-\tau^2)\frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}_\mu}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{x}_{\mu'}}\right)$$
$$= \tau^2(1-\tau^2)\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{x}_{\mu'}}\left(\frac{\partial H}{\partial v_\mu} + \tau\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}_\mu}\right) = \tau^2(1-\tau^2)^2\frac{\partial^2 H}{\partial \mathfrak{x}_{\mu'}\, \partial x_\mu}$$

woraus endlich fliesst

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_\mu\, \partial \mathfrak{x}_{\mu'}} = \frac{2\tau}{1-\tau^2}\frac{\partial H}{\partial x_{\mu\mu'}}.$$

Drückt man die $a, \bar{a}, \mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}$ durch die $\mathfrak{x}_{\mu\mu'}$ aus, so erhält man in ähnlicher Weise

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_\mu\, \partial \mathfrak{x}_{\mu'}} = \frac{2\tau}{1-\tau^2}\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{x}_{\mu'\mu}}.$$

§ 4. **Periodicität.** Vermehrt man in der Function $\vartheta(v_\lambda;\, \mathfrak{v}_\lambda)$ irgend ein Argument v oder $\mathfrak{v}$ um $i\pi$, so bleibt dieselbe ungeändert, sie hat die Periode $i\pi$. Vermehrt man aber die Argumente um ein System gleichzeitiger Periodicitätsmoduln $a, \bar{a}, \mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}$, so notiren wir die Gleichungen:

$$\vartheta(v_\lambda + m a_{\lambda\mu};\, \mathfrak{v}_\lambda + m a_{\lambda\mu}) = \vartheta(v_\lambda;\, \mathfrak{v}_\lambda)\, e^{-a_{\mu\mu} mm - 2m\mathfrak{v}_\mu},$$
$$\vartheta(v_\lambda + \mathfrak{m}\bar{a}_{\lambda\mu};\, \mathfrak{v}_\lambda + \mathfrak{m}\bar{a}_{\lambda\mu}) = \vartheta(v_\lambda;\, \mathfrak{v}_\lambda)\, e^{-\bar{a}_{\mu\mu}\mathfrak{m}\mathfrak{m} - 2\mathfrak{m}\mathfrak{v}_\mu},$$
$$\vartheta(v_\lambda + m a_{\lambda\mu} + \mathfrak{m}\bar{a}_{\lambda\mu};\, \mathfrak{v}_\lambda + m a_{\lambda\mu} + \mathfrak{m}\bar{a}_{\lambda\mu})$$
$$= \vartheta(v_\lambda;\, \mathfrak{v}_\lambda)\, e^{-2m v_\mu - 2\mathfrak{m}\mathfrak{v}_\mu - mm a_{\mu\mu} - \mathfrak{m}m(\bar{a}_{\mu\mu} + a_{\mu\mu}) - \mathfrak{m}\mathfrak{m}\bar{a}_{\mu\mu}}$$
$$= \vartheta(v_\lambda;\, \mathfrak{v}_\lambda)\, e^{-2m v_\mu - 2\mathfrak{m}\mathfrak{v}_\mu - a_{\mu\mu}(mm - m\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\mathfrak{m})}.$$

Sind m und $\mathfrak{m}$ einander entgegengesetzt gleich, so hat man noch

$$\vartheta(v_\lambda + m(a_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu});\, \mathfrak{v}_\lambda + \mathfrak{m}(a_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu})) = \vartheta(v_\lambda;\, \mathfrak{v}_\lambda)\, e^{2m(\mathfrak{v}_\mu - v_\mu) - 3mm a_{\mu\mu}}.$$

§ 5. **Transformation.** Bekanntlich besteht die Gleichung

$$\vartheta^{h_1 h_2 \ldots h_p}_{g_1 g_2 \ldots g_p}(v_1, v_2, \ldots v_p)_{(a)} = \epsilon\, e^{-\frac{1}{\pi\pi}\sum_1^p{}_{\nu}\sum_1^p{}_{\nu'} v_\nu v_{\nu'} b_{\nu\nu'}} \cdot \vartheta^{g_1 g_2 \ldots g_p}_{h_1 h_2 \ldots h_p}(v'_1, v'_2, \ldots v'_p)_{(b)} \cdot \sqrt{\frac{1}{\Delta(a)}},$$

Digitized by Google

wenn die angehängten Grössen (a), (b) die Moduln der Theta-Functionen $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{pp}$ bez. $b_{11}, b_{12}, \ldots b_{pp}$ bezeichnen und $\Delta(a)$ die Determinante aus den pp Elementen $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{pp}$ ist, und wenn ferner

$$b_{\mu\mu'} = \pi^2 \frac{\delta \lg \Delta(a)}{\delta a_{\mu'\mu}}, \quad v'_\mu = i\pi \sum_1^p v_\nu \frac{\delta \lg \Delta(a)}{\delta a_{\nu\mu}} = \frac{i}{\pi} \sum_1^p v_\nu b_{\mu\nu}$$

und ε eine numerische Constante ist.

Hier sollen nun für die a die Grössen $a, \bar{a}, \mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}$ eingeführt werden, und es soll $\nu, \mu \leqq n$, $b_{\nu,n+\mu} = \bar{b}_{\nu\mu}$, $b_{\nu+n,\mu} = \mathfrak{b}_{\nu\mu}$, $b_{\nu+n,\mu+n} = \bar{\mathfrak{b}}_{\nu\mu}$ gesetzt werden. Für $\Delta(a)$ mag $\begin{vmatrix} (a), & (\bar{a}) \\ (\mathfrak{a}), & (\bar{\mathfrak{a}}) \end{vmatrix}$ geschrieben und diese Schreibweise auf ähnliche Determinante von pp Elementen übertragen werden. Aus dem Multiplicationstheorem der Determinanten folgt sofort die Beziehung

$$\begin{vmatrix} (a), & (\bar{a}) \\ (\mathfrak{a}), & (\bar{\mathfrak{a}}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x), & (\bar{x}) \\ (\mathfrak{x}), & (\bar{\mathfrak{x}}) \end{vmatrix} : (1-\tau^2) .$$

Lässt man sodann die Gleichungen statthaben $\bar{x}_{\mu\mu'} = \tau^2 x_{\mu\mu'}$, $\mathfrak{x}_{\mu\mu'} = \tau^2 \bar{\mathfrak{x}}_{\mu\mu'}$, so findet man leicht

$$\begin{vmatrix} (x), & (\bar{x}) \\ (\mathfrak{x}), & (\bar{\mathfrak{x}}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x), & (\tau^2 x) \\ (\tau^2\mathfrak{x}), & (\bar{\mathfrak{x}}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x), & (0) \\ (\tau^2\mathfrak{x}), & ((1-\tau)\bar{\mathfrak{x}}) \end{vmatrix} = (1-\tau)^n . |x| . |\bar{\mathfrak{x}}|$$

und also

$$\begin{vmatrix} (a), & (\bar{a}) \\ (\mathfrak{a}), & (\bar{\mathfrak{a}}) \end{vmatrix} = |x| . |\mathfrak{x}| \left(\frac{1-\tau}{1-\tau^2}\right)^n = |x| . |\bar{\mathfrak{x}}| (-\tau)^n .$$

Wir bedürfen hier und auch noch später einfacherer Formen für die Ausdrücke

$$\frac{\delta}{\delta x_{\mu\mu'}} \begin{vmatrix} (x), & (\bar{x}) \\ (\mathfrak{x}), & (\bar{\mathfrak{x}}) \end{vmatrix}, \quad \frac{\delta}{\delta \bar{x}_{\mu\mu'}} \begin{vmatrix} (x), & (\bar{x}) \\ (\mathfrak{x}), & (\bar{\mathfrak{x}}) \end{vmatrix}, \quad \frac{\delta}{\delta \mathfrak{x}_{\mu\mu'}} \begin{vmatrix} (x), & (\bar{x}) \\ (\mathfrak{x}), & (\bar{\mathfrak{x}}) \end{vmatrix}, \quad \frac{\delta}{\delta \bar{\mathfrak{x}}_{\mu\mu'}} \begin{vmatrix} (x), & (\bar{x}) \\ (\mathfrak{x}), & (\bar{\mathfrak{x}}) \end{vmatrix},$$

in denen erst nach Ausführung der formalen Differentiation die Beziehungen $\bar{x} = \tau\tau x$, $\mathfrak{x} = \tau\tau\bar{\mathfrak{x}}$ eingeführt werden. Der erste dieser Ausdrücke ist die Determinante

$$\begin{vmatrix}
x_{11}, & x_{12} \ldots x_{1\mu'-1}, & 0, & x_{1\mu'+1} \ldots x_{1n}, & \bar{x}_{11}, & \bar{x}_{12} \ldots \bar{x}_{1n} \\
x_{21}, & x_{22} \ldots x_{2\mu'-1}, & 0, & x_{2\mu'+1} \ldots x_{2n}, & \bar{x}_{21}, & \bar{x}_{22} \ldots \bar{x}_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_{\mu-1,1}, & \ldots x_{\mu-1,\mu'-1}, & 0, & x_{\mu-1,\mu'+1} \ldots x_{\mu-1,n}, & \bar{x}_{\mu-1,1} & \ldots \bar{x}_{\mu-1,n} \\
0 \quad 0 & \ldots 0 & 1, & 0 \ldots 0 & 0 & \ldots 0 \\
x_{\mu+1,1}, & \ldots x_{\mu+1,\mu'-1}, & 0, & x_{\mu+1,\mu'+1} \ldots & & \ldots \bar{x}_{\mu-1,n} \\
x_{n1}, & x_{n2} \ldots x_{n\mu'-1}, & 0, & x_{n\mu'+1} \ldots x_{nn}, & \bar{x}_{n1} & \ldots \bar{x}_{nn} \\
\mathfrak{x}_{11}, & \mathfrak{x}_{12} \ldots \mathfrak{x}_{1\mu'-1}, & 0, & \mathfrak{x}_{1\mu'+1} \ldots \mathfrak{x}_{1n}, & \bar{\mathfrak{x}}_{11} & \ldots \bar{\mathfrak{x}}_{1n} \\
\mathfrak{x}_{\mu 1}, & \mathfrak{x}_{\mu 2} \ldots \mathfrak{x}_{\mu\mu'-1}, & 0, & \mathfrak{x}_{\mu\mu'+1} \ldots \mathfrak{x}_{\mu n}, & \bar{\mathfrak{x}}_{\mu 1}, & \bar{\mathfrak{x}}_{\mu 2} \ldots \bar{\mathfrak{x}}_{\mu n} \\
\mathfrak{x}_{n1}, & \mathfrak{x}_{n2} \ldots \mathfrak{x}_{n\mu'-1}, & 0, & \mathfrak{x}_{n\mu'+1} \ldots \mathfrak{x}_{nn}, & \bar{\mathfrak{x}}_{n1}, & \bar{\mathfrak{x}}_{n2} \ldots \bar{\mathfrak{x}}_{nn}
\end{vmatrix} .$$

Multiplicirt man hierin die 1^{te}, 2^{te}, $\ldots \mu'-1^{te}$, $\mu'+1^{te}$, $\ldots n^{te}$ Vertikalreihe mit je τ^2 und subtrahirt sie von den entsprechenden letzten Vertikalreihen, nämlich der $n+1^{ten}$, $n+2^{ten}$, $\ldots n+\mu'-1^{ten}$, $n+\mu'+1^{ten} \ldots 2n^{ten}$ und zieht den Factor $(1-\tau)$, $n-1$ mal heraus, so erhält man hierfür die Determinante

Digitized by Google

$$(1-\tau)^{n-1}\begin{vmatrix} x_{11}, x_{12} \dots x_{1\mu'-1}, 0, x_{1\mu'+1} \dots x_{1n}, 0, 0 \dots \tau^2 x_{1\mu'}, 0 \dots 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{\mu-11}, x_{\mu-12} \dots x_{\mu-1,\mu'-1}, 0, x_{\mu-1,\mu'+} \dots x_{\mu-1n}, 0, 0 \dots \tau^2 x_{\mu-1\mu'}, 0 \dots 0 \\ 0, 0, \dots 0, 1, 0, \dots 0, 0, 0 \dots 0, 0 \dots 0 \\ x_{\mu+11}, x_{\mu+12} \dots x_{\mu+1,\mu'-1}, 0, x_{\mu+1,\mu'+1} \dots x_{\mu+1n}, 0, 0 \dots \tau^2 x_{\mu-1\mu'}, 0 \dots 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{n1}, x_{n2} \dots x_{n\mu'-1}, 0, x_{n\mu'+1} \dots x_{nn}, 0, 0 \dots \tau^2 x_{n\mu'}, 0 \dots 0 \\ \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12} \dots \mathfrak{x}_{1\mu'-1}, 0, \mathfrak{x}_{1\mu'+1} \dots \mathfrak{x}_{1n}, \bar{\mathfrak{x}}_{11}, \bar{\mathfrak{x}}_{12} \dots \bar{\mathfrak{x}}_{1\mu'}, \dots \bar{\mathfrak{x}}_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mathfrak{x}_{\mu 1}, \mathfrak{x}_{\mu 2} \dots \mathfrak{x}_{\mu\mu'-1}, 0, \mathfrak{x}_{\mu\mu'+1} \dots \mathfrak{x}_{\mu n}, \bar{\mathfrak{x}}_{\mu 1}, \bar{\mathfrak{x}}_{\mu 2} \dots \bar{\mathfrak{x}}_{\mu\mu'}, \dots \bar{\mathfrak{x}}_{\mu n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mathfrak{x}_{n1}, \mathfrak{x}_{n2} \dots \mathfrak{x}_{n\mu'-1}, 0, \mathfrak{x}_{n\mu'+1} \dots \mathfrak{x}_{nn}, \bar{\mathfrak{x}}_{n1}, \bar{\mathfrak{x}}_{n2} \dots \bar{\mathfrak{x}}_{n\mu'}, \dots \bar{\mathfrak{x}}_{nn} \end{vmatrix}.$$

Um diese Determinante auszuwerthen kann man sie als eine Summe von Produkten aus Partialdeterminanten von nn Elementen darstellen, deren n Horizontalreihen immer aus den ersten bez. letzten n Horizontalreihen unserer Determinante zu nehmen sind. Man sieht sofort, dass jede Partialdeterminante, die einen von Null verschiedenen Werth haben soll, wenn sie aus den n ersten Horizontalreihen gebildet wird, nothwendig die μ'^{te} Vertikalreihe enthalten muss. Besteht sie nun nicht aus den ersten n Vertikalreihen, sondern tritt für die μ^{te} Vertikalreihe die $n+\mu'^{\text{te}}$, die einzige nicht blos aus Nullen bestehende Vertikalreihe, ein, wobei ϱ immer $\gtrless \mu'$ ist, so besteht ihr Coefficient in der Produktensumme aus der ϱ^{ten} Vertikalreihe und aus der $n+1^{\text{ten}}, n+2^{\text{ten}}, \dots n+\mu'-1^{\text{ten}}, n+\mu'+1^{\text{ten}}, \dots 2n^{\text{ten}}$ Vertikalreihe der letzten n Horizontalreihen und dieser Coefficient ist Null, weil in dieser Determinante sich die aus der ϱ^{ten} und der $n+\varrho^{\text{ten}}$ Vertikalreihe gebildeten Reihen in allen entsprechenden Termen nur durch einen und denselben Factor unterscheiden. Demnach bleibt nur das Produkt der beiden Unterdeterminanten aus den n ersten Vertikal- und Horizontalreihen in die aus den n letzten Vertikal- und Horizontalreihen übrig, und es ist:

$$\frac{\delta}{\delta x_{\mu\mu'}}\begin{vmatrix} (x), (\bar{x}) \\ (\mathfrak{x}), (\bar{\mathfrak{x}}) \end{vmatrix} = (1-\tau)^{n-1} \mid \bar{\mathfrak{x}} \mid \frac{\delta \mid x \mid}{\delta x_{\mu\mu'}}.$$

Vertauscht man die μ'^{te} Vertikalreihe mit der $n+\mu'^{\text{te}n}$ wodurch ein Zeichenwechsel bewirkt wird so folgt weiter

$$\frac{\delta}{\delta \bar{x}_{\mu\mu'}}\begin{vmatrix} (x), (\bar{x}) \\ (\mathfrak{x}), (\bar{\mathfrak{x}}) \end{vmatrix} = -(1-\tau)^{n-1}\tau^2 . \mid \bar{\mathfrak{x}} \mid \frac{\delta \mid x \mid}{\delta x_{\mu\mu'}}.$$

Eine ganz gleiche Rechnung ergiebt sodann

$$\frac{\delta}{\delta \bar{\mathfrak{x}}_{\mu\mu'}}\begin{vmatrix} (x), (\bar{x}) \\ (\mathfrak{x}), (\bar{\mathfrak{x}}) \end{vmatrix} = (1-\tau)^{n-1} \mid x \mid \frac{\delta \mid \bar{\mathfrak{x}} \mid}{\delta \bar{\mathfrak{x}}_{\mu\mu'}},$$

$$\frac{\delta}{\delta \mathfrak{x}_{\mu\mu'}}\begin{vmatrix} (x), (\bar{x}) \\ (\mathfrak{x}), (\bar{\mathfrak{x}}) \end{vmatrix} = -(1-\tau)^{n-1}\tau^2 \mid x \mid \frac{\delta \mid \bar{\mathfrak{x}} \mid}{\delta \bar{\mathfrak{x}}_{\mu\mu'}}.$$

Hieraus zieht man die Gleichungen

$$\frac{1}{\pi\pi} b_{\mu\mu'} = \frac{\delta \lg}{\delta a_{\mu'\mu}}\begin{vmatrix} (a), (\bar{a}) \\ (\mathfrak{a}), (\bar{\mathfrak{a}}) \end{vmatrix} = \frac{\delta \lg}{\delta x_{\mu'\mu}}\begin{vmatrix} (x), (\bar{x}) \\ (\mathfrak{x}), (\bar{\mathfrak{x}}) \end{vmatrix} - \tau \frac{\delta \lg}{\delta \mathfrak{x}_{\mu'\mu}}\begin{vmatrix} (x), (\bar{x}) \\ (\mathfrak{x}), (\bar{\mathfrak{x}}) \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{1-\tau}\frac{\delta \lg \mid x \mid}{\delta x_{\mu'\mu}} + \frac{1}{1-\tau}\frac{\delta \lg \mid \bar{\mathfrak{x}} \mid}{\delta \bar{\mathfrak{x}}_{\mu'\mu}},$$

$$\frac{1}{\pi\pi} \bar{b}_{\mu\mu'} = \frac{\delta \lg}{\delta a_{\mu'\mu}}\begin{vmatrix} (a), (\bar{a}) \\ (\mathfrak{a}), (\bar{\mathfrak{a}}) \end{vmatrix} = \frac{-\tau\,\delta \lg}{\delta x_{\mu'\mu}}\begin{vmatrix} (x), (\bar{x}) \\ (\mathfrak{x}), (\bar{\mathfrak{x}}) \end{vmatrix} + \frac{\delta \lg}{\delta \mathfrak{x}_{\mu'\mu}}\begin{vmatrix} (x), (\bar{x}) \\ (\mathfrak{x}), (\bar{\mathfrak{x}}) \end{vmatrix}$$
$$= \frac{-\tau}{1-\tau}\frac{\delta \lg \mid x \mid}{\delta x_{\mu'\mu}} - \frac{\tau^2}{1-\tau}\frac{\delta \lg \mid \bar{\mathfrak{x}} \mid}{\delta \bar{\mathfrak{x}}_{\mu'\mu}},$$

Digitized by Google

$$\frac{1}{\pi\pi}\mathfrak{b}_{\mu\mu'} = \frac{\delta \lg}{\delta a_{\mu'\mu}}\begin{vmatrix}(a), (\bar{a})\\(\mathfrak{a}), (\bar{\mathfrak{a}})\end{vmatrix} = \frac{\delta \lg}{\delta x_{\mu'\mu}}\begin{vmatrix}(x), (\bar{x})\\(\mathfrak{x}), (\bar{\mathfrak{x}})\end{vmatrix} - \tau\frac{\delta \lg}{\delta \bar{\mathfrak{x}}_{\mu'\mu}}\begin{vmatrix}(x), (\bar{x})\\(\mathfrak{x}), (\bar{\mathfrak{x}})\end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\tau^2}{1-\tau}\frac{\delta \lg |x|}{\delta x_{\mu'\mu}} - \frac{\tau}{1-\tau}\frac{\delta \lg |\bar{\mathfrak{x}}|}{\delta \bar{\mathfrak{x}}_{\mu'\mu}},$$

$$\frac{1}{\pi\pi}\bar{\mathfrak{b}}_{\mu\mu'} = \frac{\delta \lg}{\delta \bar{a}_{\mu'\mu}}\begin{vmatrix}(a), (\bar{a})\\(\mathfrak{a}), (\bar{\mathfrak{a}})\end{vmatrix} = -\tau\frac{\delta \lg}{\delta \bar{x}_{\mu'\mu}}\begin{vmatrix}(x), (\bar{x})\\(\mathfrak{x}), (\bar{\mathfrak{x}})\end{vmatrix} + \frac{\delta \lg}{\delta \bar{\mathfrak{x}}_{\mu'\mu}}\begin{vmatrix}(x), (\bar{x})\\(\mathfrak{x}), (\bar{\mathfrak{x}})\end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-\tau}\frac{\delta \lg |x|}{\delta x_{\mu'\mu}} + \frac{1}{1-\tau}\frac{\delta \lg |\bar{\mathfrak{x}}|}{\delta \bar{\mathfrak{x}}_{\mu'\mu}}.$$

Vergleicht man diese Grössen mit denen, welche sich in gleicher Bezeichnung aus dem Paragraph 35 des Theiles I. pag. 19 ergeben, so findet man eine vollständige Uebereinstimmung, und schliesst daraus, dass die eben ausgeführte Transformation zu der Vertauschung der Querschnitte a und b in engster Beziehung steht.

§ 6. **Der Fall** $n=1$. Für den Fall $n=1$ lässt sich die ϑ-Function, die zwei Argumente enthält, durch ϑ-Functionen mit einem Argumente, wie sie die Gleichung definirt

$$\vartheta(V, A) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_m e^{2mV+mmA}$$

ausdrücken. Dabei können die Indices entbehrt werden. Es ist nämlich

$$\vartheta(v, \mathfrak{v}) = \left(\sum_{-\infty}^{\infty}\right)^2 e^{(mm-mm+mm)a+2mv+2m\mathfrak{v}}$$

$$= \left(\sum_{-\infty}^{\infty}\right)^2 e^{\frac{1}{4}a(m+m)^2+\frac{3}{4}a(m-m)^2+(m+m)v+(m-m)(v-\mathfrak{v})}$$

$$= \left(\sum_{-\infty}^{\infty}\right)^2 e^{\frac{1}{4}(2m)^2a+\frac{3}{4}(2m)^2a+2m(v+\mathfrak{v})+2m(v-\mathfrak{v})}$$

$$+ \left(\sum_{-\infty}^{\infty}\right)^2 e^{\frac{1}{4}a(2m+1)^2+\frac{3}{4}a(2m+1)^2+(2m+1)(v+\mathfrak{v})+(2m+1)(v-\mathfrak{v})}$$

$$= \vartheta(v+\mathfrak{v}, a)\,.\,\vartheta(v-\mathfrak{v}, 3a) + e^{a+2v}\,.\,\vartheta(v+\mathfrak{v}+\tfrac{1}{2}a, a)\,.\,\vartheta(v-\mathfrak{v}+\tfrac{3}{2}a, 3a)$$

$$= \vartheta(\mathfrak{v}+v, a)\,.\,\vartheta(\mathfrak{v}-v, 3a) + e^{3a+2\mathfrak{v}}\,.\,\vartheta(\mathfrak{v}+v+\tfrac{1}{2}a, a)\,.\,\vartheta(\mathfrak{v}-v+\tfrac{3}{2}a, 3a).$$

Darstellung algebraischer Functionen durch Theta-Functionen.

§ 7. **Vorbemerkung.** Wir haben Theil I. § 29 und 30 gesehen dass die Grössen N und $\mathfrak{N}$ in der Form enthalten sind

$$(N_\lambda;\ \mathfrak{N}_\lambda) = (\sum_1^n(c_\nu a_{\lambda\nu}+\mathfrak{c}_\nu \bar{a}_{\lambda\nu})+d_\lambda i\pi;\quad \sum_1^n(\mathfrak{c}_\nu a_{\lambda\nu}+\mathfrak{c}_\nu \bar{a}_{\lambda\nu})+\mathfrak{d}_\lambda i\pi)$$

worin $c\,\mathfrak{c}\,d\,\mathfrak{d}$ ganze Zahlen sind. Es kann nun allerdings erst bei der Bestimmung von $\vartheta(0, 0 \ldots 0)$ durch die Moduln k, $\mathfrak{k}$ gezeigt werden, dass die Zahlen c und $\mathfrak{c}$ und ebenso die Zahlen d und $\mathfrak{d}$ sämmtlich Null sind. Wir werden uns jedoch manche Weitläufigkeiten ersparen, wenn wir diese Resultate vorauf nehmen, was meist geschehen soll. Dass die Charakteristik $\sum_1^n c_\nu d_\nu+\mathfrak{c}_\nu \mathfrak{d}_\nu$ gerade ist, müssen wir und werden wir schon früher im § 14 nachweisen, dass wir uns aber hierbei keiner Zirkelschlüsse schuldig machen, davon wird der aufmerksame Leser selbst sich leicht überzeugen.

§ 8. Am einfachsten drücken sich die Functionen $[\varkappa, \varkappa']$ der §§ 42 und 43 des Theiles I durch überall endliche Integrale mittels ϑ-Functionen aus. Es werde zunächst $[k_\mu, \mathfrak{k}_\mu]$ dargestellt. Dabei sei zur Abkürzung

Digitized by Google

$$(v_\lambda(k_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(k_\mu)) = (u_\lambda(k_\mu) - \sum_1^p u_\lambda(s_\nu,\ z_\nu);\ \mathfrak{u}_\lambda(k_\mu) - \sum_1^p \mathfrak{u}_\lambda(s_\nu,\ z_\nu)),$$

$$(v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{k}_\mu)) = (u_\lambda(\mathfrak{k}_\mu) - \sum_1^p u_\lambda(s_\nu,\ z_\nu);\ \mathfrak{u}_\lambda(\mathfrak{k}_\mu) - \sum_1^p \mathfrak{u}_\lambda(s_\nu,\ z_\nu)).$$

Dann ergiebt sich leicht die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{\vartheta(v_\lambda(k_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(k_\mu))}{\vartheta(v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{k}_\mu))} = C(k_\mu,\ \mathfrak{k}_\mu) \cdot \sqrt[3]{\frac{z_1 - k_\mu}{z_1 - \mathfrak{k}_\mu} \cdot \frac{z_2 - k_\mu}{z_2 - \mathfrak{k}_\mu} \cdots \frac{z_p - k_\mu}{z_p - \mathfrak{k}_\mu}},$$

worin $C(k_\mu,\ \mathfrak{k}_\mu)$ eine Grösse bedeutet, die von den p Veränderlichen $z_1,\ z_2 \ldots z_p$ unabhängig ist.

Es bestehen nämlich, wenn $\varrho \gtrless \mu$ und $\varrho,\ \mu < n+1$ ist, wie aus den Tabellen auf Seite 14 und Seite 15 ersehen wird, die Gleichungen

$$v_\varrho(k_\mu) = v_\varrho(\mathfrak{k}_\mu),\quad \mathfrak{v}_\varrho(k_\mu) = \mathfrak{v}_\varrho(\mathfrak{k}_\mu),\quad v_\mu(k_\mu) = v_\mu(\mathfrak{k}_\mu) - \tfrac{1}{2}i\pi,\quad \mathfrak{v}_\mu(k_\mu) = \mathfrak{v}_\mu(\mathfrak{k}_\mu) - \tfrac{1}{2}i\pi,$$

für $\mu = n+1$ aber die Gleichungen

$$v_\varrho(k_{n+1}) = v_\varrho(\mathfrak{k}_{n+1}) + \tfrac{1}{2}i\pi,\quad \mathfrak{v}_\varrho(k_{n+1}) = \mathfrak{v}_\varrho(\mathfrak{k}_{n+1}) + \tfrac{1}{2}i\pi.$$

Als Function von $s_\nu,\ z_\nu$ verschwindet aber der ϑ-Quotient (R. pag. 148) im Puncte k_μ in der ersten Ordnung und wird im Puncte $\mathfrak{k}_\mu$ unendlich gross erster Ordnung, verhält sich also in diesen Puncten wie die Function $\sqrt[3]{(z_\nu - k_\mu) : (z_\nu - \mathfrak{k}_\mu)}$, weil in einem Verzweigungspuncte $\varkappa$ die Differenz $z_\nu - \varkappa$ für $z_\nu = \varkappa$ unendlich klein dritter Ordnung wird. Führt man den Punct $s_\nu,\ z_\nu$ über irgend einen Querschnitt a oder $\bar{a}$ hinweg zur Anfangslage zurück, so ändert sich ein bestimmtes Argument v oder $\mathfrak{v}$ um $-i\pi$, wodurch der Quotient wegen der Periodicität der ϑ-Functionen ungeändert bleibt. Führt man aber den Punct $s_\nu,\ z_\nu$ über $b_{\mu'}$ oder $\overline{b_{\mu'}}$ hinweg, so vermindert sich das System $(v_\lambda;\ \mathfrak{v}_\lambda)$ bez. um das System $(a_{\lambda\mu'};\ \mathfrak{a}_{\lambda\mu'})$ oder $(\overline{a_{\lambda\mu'}};\ \overline{\mathfrak{a}_{\lambda\mu'}})$. Dadurch gewinnt der Zähler nach der II. § 4 besprochenen Periodicität der ϑ-Functionen

bei $b_{\mu'}$ den Factor $e^{-a_{\mu'\mu'} + 2v_{\mu'}(k_\mu)}$, bei $\overline{b_{\mu'}}$ den Factor $e^{-\overline{a}_{\mu'\mu'} + 2\mathfrak{v}_{\mu'}(k_\mu)}$,

der Nenner

bei $b_{\mu'}$ den Factor $e^{-a_{\mu'\mu'} + 2v_{\mu'}(\mathfrak{k}_\mu)}$, bei $\overline{b_{\mu'}}$ den Factor $e^{-\overline{a}_{\mu'\mu'} + 2\mathfrak{v}_{\mu'}(\mathfrak{k}_\mu)}$.

Diese Factoren des Zählers und Nenners sind wenn $\mu < n+1$ und $\mu' \gtrless \mu$ ist, einander gleich, also ihr Quotient ist Eins. Ihr Quotient ist aber $\tau\tau$ wenn $\mu = \mu'$ ist. Für $\mu = n+1$ aber ist der Quotient der Factoren für jedes μ' gleich τ. Dieselbe Periodicität besitzt aber wie I § 42 gezeigt ist, die Function $[k_\mu,\ \mathfrak{k}_\mu]$. Demnach kann sich der oben aufgestellte ϑ-Quotient von $\sqrt[3]{(z_\nu - k_\mu) : (z_\nu - \mathfrak{k}_\mu)}$ nur durch einen von z_ν unabhängigen Factor unterscheiden. Gleiche Schlussweise gilt aber für die Variabelen $z_1,\ z_2 \ldots z_p$, so dass die Richtigkeit der angesetzten Gleichung bewiesen ist.

§ 9. Es erübrigt, die Constante $C(k_\mu,\ \mathfrak{k}_\mu)$ zu bestimmen. Hierzu wirft man die Puncte $z_1,\ z_2 \ldots z_p$ paarweise auf die Puncte $k_1,\ k_2 \ldots k_{\mu-1},\ k_{\mu+1} \ldots k_{n+1}$. Dann erhält man nach I § 30 und in der dort eingeführten Bezeichnung — nach welcher $(i\pi)_{\lambda\mu}$ Null ist, wenn $\mu \gtrless \lambda$ und $(i\pi)_{\lambda\lambda} = i\pi$ ist, — die Gleichungen

$$(v_\lambda(k_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(k_\mu)) = (a_{\lambda\mu} - \overline{a}_{\lambda\mu} + [\mu - \lambda]i\pi - \tfrac{1}{2}N_\lambda;\ \mathfrak{a}_{\lambda\mu} - \overline{\mathfrak{a}}_{\lambda\mu} + [\mu - \lambda]i\pi - \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda),$$
$$(v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{k}_\mu)) = (v_\lambda(k_\mu) + \tfrac{1}{2}(i\pi)_{\lambda\mu};\ \mathfrak{v}_\lambda(k_\mu) + \tfrac{1}{2}(i\pi)_{\lambda\mu}),$$

woraus mit Rücksicht auf die Periodicität der ϑ-Functionen — welche einerseits erlaubt, Multipla von $i\pi$ in den Argumenten $v,\ \mathfrak{v}$ fortzulassen, andererseits aber auch erlaubt das System $(a_{\lambda\mu} - \overline{a}_{\lambda\mu};\ \mathfrak{a}_{\lambda\mu} - \overline{\mathfrak{a}}_{\lambda\mu})$ im Zähler und Nenner gleichzeitig fortzulassen — folgt

$$\frac{\vartheta(-\tfrac{1}{2}N_\lambda;\ -\tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda)}{\vartheta(\tfrac{1}{2}(i\pi)_{\lambda\mu} - \tfrac{1}{2}N_\lambda;\ \tfrac{1}{2}(i\pi)_{\lambda\mu} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda)} = C(k_\mu,\ \mathfrak{k}_\mu)\sqrt{\left[\frac{P'(k_\mu)\,(k_\mu - \mathfrak{k}_\mu)}{P(\mathfrak{k}_\mu)}\right]^2}.$$

Wäre die Charakteristik von $(N_\lambda;\ \mathfrak{N}_\lambda)$ ungerade, so würde der Zähler verschwinden, und es müsste, wenn nicht etwa auch der Nenner verschwände, $C(k_\mu,\ \mathfrak{k}_\mu)$ Null sein. Wir werden aber in § 14 zeigen, dass die Charakteristik gerade ist.

Digitized by Google

Werfen wir nun zweitens die Puncte $z_1, z_2 \ldots z_p$ paarweise auf $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2 \ldots \mathfrak{k}_{\mu-1}, \mathfrak{k}_{\mu+1} \ldots \mathfrak{k}_{n+1}$ so erhalten wir nach I § 30 die Gleichungen

$$(v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu);\ v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu)) = (a_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu} + [\mu+1-i\pi]i\pi - \tfrac{1}{2}N_\lambda;\quad a_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu} + [\mu+1-\lambda]i\pi - \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda),$$
$$(v_\lambda(k_\mu);\ v_\lambda(k_\mu)) = (v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu) - \tfrac{1}{2}(i\pi)_{\lambda\mu};\quad v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu) - \tfrac{1}{2}(i\pi)_{\lambda\mu}),$$

und es folgt wieder mit Rücksicht auf die Periodicität der ϑ-Functionen

$$\frac{\vartheta(-\tfrac{1}{2}N_\lambda - \tfrac{1}{2}(i\pi)_{\lambda\mu};\ -\tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda - \tfrac{1}{2}(i\pi)_{\lambda\mu})}{\vartheta(-\tfrac{1}{2}N_\lambda;\ -\tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda)} = C(k_\mu, \mathfrak{k}_\mu)\sqrt[3]{\left[\frac{\mathfrak{P}(k_\mu)}{\mathfrak{P}'(\mathfrak{k}_\mu)\,(k_\mu - \mathfrak{k}_\mu)}\right]^2}.$$

Durch Multiplication der so erhaltenen Gleichungen ergiebt sich

$$\frac{\vartheta(-\tfrac{1}{2}N_\lambda - \tfrac{1}{2}(i\pi)_{\lambda\mu};\ -\tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda - \tfrac{1}{2}(i\pi)_{\lambda\mu})}{\vartheta(-\tfrac{1}{2}N_\lambda + \tfrac{1}{2}(i\pi)_{\lambda\mu};\ -\tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda + \tfrac{1}{2}(i\pi)_{\lambda\mu})} = C^2(k_\mu, \mathfrak{k}_\mu)\sqrt[3]{\left(\frac{R'(k_\mu)}{R'(\mathfrak{k}_\mu)}\right)^2}.$$

Im § 14 wird nun, wie schon bemerkt, bewiesen, dass die Charakteristik von $(N_\lambda, \mathfrak{N}_\lambda)$ gerade ist, woraus sogleich folgt, dass die linke Seite unserer Gleichung eine 3te Wurzel der Einheit ist, die so lange unbekannt bleibt, als die c c d b unbekannt sind. Nimmt man aber die Voraussetzungen des § 7 dazu, so ist die linke Seite der letzten Gleichung Eins, und demnach

$$C(k_\mu, \mathfrak{k}_\mu) = \pm\sqrt[3]{R'(\mathfrak{k}_\mu) : R'(k_\mu)},$$

und also, wenn $v_\lambda(k_\mu), \ldots$ ihre ursprüngliche Bedeutung haben

$$\frac{\vartheta(v_\lambda(k_\mu);\ v_\lambda(k_\mu))}{\vartheta(v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu);\ v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu))} = \pm\sqrt[3]{\frac{R'(\mathfrak{k}_\mu)}{R'(k_\mu)}} \cdot \frac{z_1 - k_\mu}{z_1 - \mathfrak{k}_\mu} \cdot \frac{z_2 - k_\mu}{z_2 - \mathfrak{k}_\mu} \cdots \frac{z_p - k_\mu}{z_p - \mathfrak{k}_\mu},$$

welche Gleichung auch bestehen bleibt, wenn $\mu = n+1$ ist, wenn schon die Constantenbestimmung in diesem Falle kleine Modificationen erheischt.

§ 10. Nun werde $[\mathfrak{k}_\mu, k_{\mu+1}]$ dargestellt. Man beweist hierzu die Gleichung

$$\frac{\vartheta(v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu);\ v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu))}{\vartheta(v_\lambda(k_{\mu+1});\ v_\lambda(k_{\mu+1}))} \cdot \frac{e^{\frac{2}{3}(v_\mu(\mathfrak{k}_\mu) - v_\mu(\mathfrak{k}_\mu))}}{e^{\frac{2}{3}(v_{\mu+1}(k_{\mu+1}) - v_{\mu+1}(k_{\mu+1}))}} = C(\mathfrak{k}_\mu, k_{\mu+1})\sqrt[3]{\prod_1^p \frac{z_\nu - \mathfrak{k}_\mu}{z_\nu - k_{\mu+1}}},$$

in der $C(\mathfrak{k}_\mu, k_{\mu+1})$ von $z_1; z_2 \ldots z_p$ unabhängig ist, wie folgt.

Zwischen den Argumenten der ϑ-Functionen des Zählers und Nenners bestehen (I, § 30) die Gleichungen

$$v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu) = v_\lambda(k_{\mu+1}) - \tfrac{1}{2}(\bar{a}_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu+1}) + \tfrac{1}{2}(a_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu+1}),$$
$$v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu) = v_\lambda(k_{\mu+1}) - \tfrac{1}{2}(\bar{a}_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu+1}) + \tfrac{1}{2}(a_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu+1}).$$

Als Function von z_ν wird nun der ϑ-Quotient unendlich gross und unendlich klein der ersten Ordnung in den Puncten $k_{\mu+1}$ und $\mathfrak{k}_\mu$, wie die algebraische rechte Seite der aufgestellten Gleichung es auch wird. Führt man aber den Punct s_ν, z_ν über $b_{\mu'}$ hinweg, so vermehrt sich das System der Argumente der ϑ-Functionen im Zähler und Nenner um $(-a_{\lambda\mu'};\ -a_{\lambda\mu'})$ und der ϑ-Quotient gewinnt den Factor

$$e^{2v_{\mu'}(\mathfrak{k}_\mu) - 2v_{\mu'}(k_{\mu+1})} = e^{-\frac{2}{3}(\bar{a}_{\mu'\mu} - \bar{a}_{\mu'\mu+1}) + \frac{2}{3}(a_{\mu'\mu} - a_{\mu'\mu+1})}.$$

Der Quotient der Exponentialfunctionen aber gewinnt den Factor

$$e^{\frac{2}{3}(a_{\mu\mu'} - a_{\mu+1\mu'}) - \frac{2}{3}(a_{\mu\mu'} - a_{\mu+1\mu'})}$$

und da $a_{\mu'\mu} = a_{\mu\mu'}$, $\bar{a}_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$ ist, so sind die beiden Factoren einander reciprok, und die gesammte rechte Seite bleibt daher ungeändert.

Führt man s_ν, z_ν über $\bar{b}_{\mu'}$ hinweg, so vermehrt sich das System $(v_\lambda;\ v_\lambda)$ im Zähler und Nenner um $(-\bar{a}_{\lambda\mu'},\ -\bar{a}_{\lambda\mu'})$ der Quotient der ϑ-Functionen gewinnt den Factor

$$e^{2v_{\mu'}(\mathfrak{k}_\mu) - 2v_{\mu'}(k_{\mu+1})} = e^{\frac{2}{3}(\bar{a}_{\mu'\mu} - \bar{a}_{\mu'\mu+1}) - \frac{2}{3}(a_{\mu'\mu} - a_{\mu'\mu+1})},$$

der Quotient der Exponentialfunctionen den Factor

$$e^{\frac{2}{3}(\bar{a}_{\mu\mu'} - \bar{a}_{\mu+1\mu'}) - \frac{2}{3}(\bar{a}_{\mu\mu'} - \bar{a}_{\mu+1\mu'})},$$

Digitized by Google

welcher dem vorigen wegen der Beziehungen $\bar{a}_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$, $\bar{\bar{a}}_{\mu\mu'} = \bar{a}_{\mu'\mu}$ reciprok ist. Also bleibt die rechte Seite der stipulirten Gleichung ungeändert, sowohl wenn man s_ν, z_ν über $b_{\mu'}$ als auch wenn man s_ν, z_ν über $\bar{b}_{\mu'}$ führt. Führt man aber s_ν, z_ν über $a_{\mu'}$ oder $\bar{a}_{\mu'}$ hinweg, wenn $\mu' \gtrless \mu$, $\mu+1$ ist, so vermehrt sich $v_{\mu'}$ bez. $\mathfrak{v}_{\mu'}$ um $-i\pi$ und der Quotient der ϑ-Functionen sowohl als der der Exponentialfunctionen erfährt hierdurch keine Aenderung. Führt man aber s_ν, z_ν über a_μ, $\bar{a}_\mu$, $a_{\mu+1}$ oder $\bar{a}_{\mu+1}$ hinweg, so bleibt der ϑ-Quotient ebenfalls ungeändert der Exponentialfactor aber gewinnt die Factoren bez. τ^2, τ, τ, τ^2.

Dies ist aber wie I, § 43 gezeigt wurde, die Periodicität der Function $[\mathfrak{k}_\mu, k_{\mu+1}]$, und da Gleiches für alle $z_1, z_2 \ldots z_p$ gilt, so ist die oben aufgestellte Gleichung erwiesen.

§ 11. Nun ermitteln wir $C(\mathfrak{k}_\mu, k_{\mu+1})$. Lassen wir die Puncte $z_1, z_2 \ldots z_p$ paarweise auf $k_1, k_2 \ldots k_\mu, k_{\mu+2} \ldots k_{n+1}$ fallen, so erhalten wir die Gleichungen:

$$v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu) = \tfrac{1}{2}(a_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu}) - \tfrac{1}{2}(a_{\lambda\mu+1} - \bar{a}_{\lambda\mu+1}) + [\mu+1-\lambda]i\pi - \tfrac{1}{2}N_\lambda + (a_{\lambda\mu+1} - \bar{a}_{\lambda\mu+1}),$$
$$\mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{k}_\mu) = \tfrac{1}{2}(a_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu}) - \tfrac{1}{2}(a_{\lambda\mu+1} - \bar{a}_{\lambda\mu+1}) + [\mu+1-\lambda]i\pi - \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda + (a_{\lambda\mu+1} - \bar{a}_{\lambda\mu+1}),$$
$$v_\lambda(k_{\mu+1}) = (a_{\lambda\mu+1} - \bar{a}_{\lambda\mu+1}) + [\mu+1-\lambda]i\pi - \tfrac{1}{2}N_\lambda,$$
$$\mathfrak{v}_\lambda(k_{\mu+1}) = (a_{\lambda\mu+1} - \bar{a}_{\lambda\mu+1}) + [\mu+1-\lambda]i\pi - \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda.$$

Dies in die Gleichung des vorigen Paragraphen eingesetzt ergiebt mit Rücksicht auf die Periodicität der ϑ-Functionen die Relation

$$\frac{\vartheta(\tfrac{1}{2}(a_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu+1} + \bar{a}_{\lambda\mu+1}) - \tfrac{1}{2}N_\lambda;\ .)\ \ e^{\frac{1}{2}(a_{\mu\mu} - \bar{a}_{\mu\mu} - a_{\mu\mu} + \bar{a}_{\mu\mu}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{N}_\mu - N_\mu)}}{\vartheta(-\tfrac{1}{2}N_\lambda;\ -\tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda)\ \ e^{\frac{1}{2}(a_{\mu\mu+1} - \bar{a}_{\mu\mu+1} - a_{\mu\mu+1} + \bar{a}_{\mu\mu+1}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{N}_{\mu+1} - N_{\mu+1})}} = C(\mathfrak{k}_\mu, k_{\mu+1}) \sqrt[3]{\left[\frac{P(\mathfrak{k}_\mu)}{(\mathfrak{k}_\mu - k_{\mu+1})\,P'(k_{\mu+1})}\right]^2}.$$

Wirft man weiter die Puncte $z_1, z_2 \ldots z_p$ paarweise auf $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2 \ldots \mathfrak{k}_{\mu-1}, \mathfrak{k}_{\mu+1} \ldots \mathfrak{k}_{n+1}$, so erhält man

$$v_\lambda(k_\mu) = (a_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu}) + [\mu+1-\lambda]i\pi - \tfrac{1}{2}N_\lambda;\quad \mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{k}_\mu) = (a_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu}) + [\mu+1-\lambda]i\pi - \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda,$$
$$v_\lambda(k_{\mu+1}) = a_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu} - \tfrac{1}{2}(a_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu}) + \tfrac{1}{2}(a_{\lambda\mu+1} - a_{\lambda\mu+1}) + [\mu+1-\lambda]i\pi - \tfrac{1}{2}N_\lambda,$$

woraus die Gleichung entspringt

$$\frac{\vartheta(-\tfrac{1}{2}N_\lambda;\ -\tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda)\ \ e^{\frac{1}{2}(\mathfrak{N}_\mu - N_\mu) - \frac{1}{2}(\mathfrak{N}_{\mu+1} - N_{\mu+1}) + \frac{1}{2}(a_{\mu+1\,\mu} + \bar{a}_{\mu+1\,\mu+1} + a_{\mu+1\,\mu+1} + \bar{a}_{\mu+1\,\mu})}}{\vartheta(-\tfrac{1}{2}(a_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu+1} + \bar{a}_{\lambda\mu+1}) - \tfrac{1}{2}N_\lambda;\ .)\ \ e^{\frac{1}{2}(\bar{a}_{\mu+1\,\mu} + a_{\mu+1\,\mu+1} + a_{\mu+1\,\mu} + \bar{a}_{\mu+1\,\mu+1})}} = C(\mathfrak{k}_\mu, k_{\mu+1}) \sqrt[3]{\left[\frac{\mathfrak{P}'(\mathfrak{k}_\mu)\,(k_{\mu+1} - \mathfrak{k}_\mu)}{P(\mathfrak{k}_\mu)}\right]^2}.$$

Das Produkt beider Quotienten giebt

$$\frac{\vartheta(\tfrac{1}{2}(a_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu+1} + \bar{a}_{\lambda\mu+1}) - \tfrac{1}{2}N_\lambda;\ .)}{\vartheta(-\tfrac{1}{2}(a_{\lambda\mu} - \bar{a}_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu+1} + \bar{a}_{\lambda\mu+1}) - \tfrac{1}{2}N_\lambda;\ .)} \cdot \frac{e^{2\Omega_\mu}}{e^{2\Omega_{\mu+1}}} = C^2(\mathfrak{k}_\mu, k_{\mu+1}) \sqrt[3]{\left[\frac{R'(\mathfrak{k}_\mu)}{R'(k_{\mu+1})}\right]^2},$$

worin

$$\Omega_\mu = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{N}_\mu - N_\mu) + \tfrac{1}{2}(a_{\mu\mu} - \bar{a}_{\mu\mu} - a_{\mu\mu} + \bar{a}_{\mu\mu}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{N}_\mu - N_\mu) + \tfrac{1}{2}a_{\mu\mu}$$

ist, eine Abkürzung die auch ferner beibehalten wird.

Mit Rücksicht auf § 7 ergiebt sich hieraus

$$e^{\Omega_\mu - \Omega_{\mu+1}} = \pm C(\mathfrak{k}_\mu, k_{\mu+1}) \sqrt[3]{R'(\mathfrak{k}_\mu) : R'(k_{\mu+1})},\quad C(\mathfrak{k}_\mu, k_{\mu+1}) = e^{\Omega_\mu - \Omega_{\mu+1}} \sqrt[3]{R'(k_{\mu+1}) : (R'(\mathfrak{k}_\mu)},$$

und somit die Gleichung

$$\frac{\vartheta(v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{k}_\mu))}{\vartheta(v_\lambda(k_{\mu+1});\ \mathfrak{v}_\lambda(k_{\mu+1}))} \cdot \frac{e^{-\Omega_\mu + \frac{1}{2}(\mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{k}_\mu) - v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu))}}{e^{-\Omega_{\mu+1} + \frac{1}{2}(\mathfrak{v}_\lambda(k_{\mu+1}) - v_\lambda(k_{\mu+1}))}} = \pm \sqrt[3]{\left(\frac{R'(k_{\mu+1})}{R'(\mathfrak{k}_\mu)} \prod_1^p \frac{z_\nu - \mathfrak{k}_\mu}{z_\nu - k_{\mu+1}}\right)}.$$

Digitized by Google

§ 12. Ist $\mu = n$, so ist

$$v_\lambda(\mathfrak{k}_n) = v_\lambda(k_{n+1}) + \tfrac{1}{3}(a_{\lambda n} - a_{\lambda n}); \quad \mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{k}_n) = \mathfrak{v}_\lambda(k_{n+1}) + \tfrac{1}{3}(\mathfrak{a}_{\lambda n} - \mathfrak{a}_{\lambda n}),$$

und es folgt dann

$$\frac{\vartheta(v_\lambda(\mathfrak{k}_n);\ \mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{k}_n))}{\vartheta(v_\lambda(k_{n+1});\ \mathfrak{v}_\lambda(k_{n+1}))} \cdot e^{-\Omega_n + \frac{2}{3}(v_n(\mathfrak{k}_n) - \mathfrak{v}_n(\mathfrak{k}_n))} = \pm \sqrt[3]{\frac{R'(k_{n+1})}{R'(\mathfrak{k}_n)}} \prod_1^p \frac{z_\nu - \mathfrak{k}_n}{z_\nu - k_{n+1}}.$$

Ist $\mu = n+1$, so ist

$$v_\lambda(\mathfrak{k}_{n+1}) = v_\lambda(k_1) - \tfrac{1}{3}(a_{\lambda 1} - \bar{a}_{\lambda 1}); \quad \mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{k}_{n+1}) = \mathfrak{v}_\lambda(k_1) - \tfrac{1}{3}(\mathfrak{a}_{\lambda 1} - \bar{\mathfrak{a}}_{\lambda 1}),$$

und es folgt hieraus

$$\frac{\vartheta(v_\lambda(\mathfrak{k}_{n+1});\ \mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{k}_{n+1}))}{\vartheta(v_\lambda(k_1);\ \mathfrak{v}_\lambda(k_1))} \cdot e^{\Omega_1 + \frac{2}{3}(\mathfrak{v}_1(k_1) - v_1(k_1))} = \pm \sqrt[3]{\frac{R'(\mathfrak{k}_{n+1})}{R'(k_1)}} \prod_1^p \frac{z_\nu - \mathfrak{k}_{n+1}}{z_\nu - k_1}.$$

Sollen diese Ausdrücke als specielle Fälle der Formel des vorigen Paragraphen erscheinen, so kann dies dadurch bewirkt werden, dass Ω_{n+1}, v_{n+1}, $\mathfrak{v}_{n+1}$, $a_{\lambda n+1}$, $\bar{a}_{\lambda n+1}$, $\mathfrak{a}_{\lambda n+1}$, $\bar{\mathfrak{a}}_{\lambda n+1}$ gleich Null angenommen werden, was bequem ist.

§ 13. Bilden wir das Produkt einer der Functionen, die im § 9 dargestellt sind, mit einer der Functionen wie sie im § 11 (oder § 12) dargestellt sind, und beachten dass

$$v_\mu(\mathfrak{k}_\mu) - \mathfrak{v}_\mu(\mathfrak{k}_\mu) = v_\mu(k_\mu) - \mathfrak{v}_\mu(k_\mu)$$

ist, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\vartheta(v_\lambda(k_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(k_\mu))}{\vartheta(v_\lambda(k_{\mu+1});\ \mathfrak{v}_\lambda(k_{\mu+1}))} \cdot \frac{e^{-\Omega_\mu + \frac{2}{3}(v_\mu(k_\mu) - \mathfrak{v}_\mu(k_\mu))}}{e^{-\Omega_{\mu+1} + \frac{2}{3}(v_{\mu+1}(k_{\mu+1}) - \mathfrak{v}_{\mu+1}(k_{\mu+1}))}} = \pm \sqrt[3]{\frac{R'(k_{\mu+1})}{R'(k_\mu)}} \prod_1^p \frac{z_\nu - k_\mu}{z_\nu - k_{\mu+1}}.$$

Setzt man aber erst in dem Ausdruck des § 9 $\mu+1$ für μ und dividirt damit die Function des § 11 (oder 12) so erhält man

$$\frac{\vartheta(v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{k}_\mu))}{\vartheta(v_\lambda(\mathfrak{k}_{\mu+1});\ \mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{k}_{\mu+1}))} \cdot \frac{e^{-\Omega_\mu + \frac{2}{3}(v_\mu(\mathfrak{k}_\mu) - \mathfrak{v}_\mu(\mathfrak{k}_\mu))}}{e^{-\Omega_{\mu+1} + \frac{2}{3}(v_{\mu+1}(\mathfrak{k}_{\mu+1}) - \mathfrak{v}_{\mu+1}(\mathfrak{k}_{\mu+1}))}} = \pm \sqrt[3]{\frac{R'(\mathfrak{k}_{\mu+1})}{R'(\mathfrak{k}_\mu)}} \prod_1^p \frac{z_\nu - \mathfrak{k}_\mu}{z_\nu - \mathfrak{k}_{\mu+1}}.$$

Diese Resultate lassen sich in einer Proportion zusammenfassen, aus der man *abgesehen vom Vorzeichen* $\pm$, welches der Kürze halber unterdrückt ist, jede der Functionen $[\varkappa, \varkappa']$ durch ϑ-Functionen dargestellt entnehmen kann. Setzen wir zur Abkürzung v für $v - \mathfrak{v}$, so schreibt sich diese Proportion

$$\vartheta(v_\lambda(k_1);\ .)\, e^{-\Omega_1 + \frac{2}{3}\bar{v}_1(k_1)} : \vartheta(v_\lambda(k_2);\ .)\, e^{-\Omega_2 + \frac{2}{3}\bar{v}_2(k_2)} : \ldots : \vartheta(v_\lambda(k_n);\ .)\, e^{-\Omega_n + \frac{2}{3}v_n(k_n)} : \vartheta(v_\lambda(k_{n+1});\ .)$$
$$: \vartheta(v_\lambda(\mathfrak{k}_1);\ .)\, e^{-\Omega_1 + \frac{2}{3}\bar{v}_1(\mathfrak{k}_1)} : \vartheta(v_\lambda(\mathfrak{k}_2);\ .)\, e^{-\Omega_2 + \frac{2}{3}v_2(\mathfrak{k}_2)} : \ldots : \vartheta(v_\lambda(\mathfrak{k}_n);\ .)\, e^{-\Omega_n + \frac{2}{3}v_n(\mathfrak{k}_n)} : \vartheta(v_\lambda(\mathfrak{k}_{n+1});\ .)$$
$$= \sqrt[3]{\frac{\Pi(z_\nu - k_1)}{R'(k_1)}} : \sqrt[3]{\frac{\Pi(z_\nu - k_2)}{R'(k_2)}} : \ldots : \sqrt[3]{\frac{\Pi(z_\nu - k_n)}{R'(k_n)}} : \sqrt[3]{\frac{\Pi(z_\nu - k_{n+1})}{R'(k_{n+1})}}$$
$$: \sqrt[3]{\frac{\Pi(z_\nu - \mathfrak{k}_1)}{R'(\mathfrak{k}_1)}} : \sqrt[3]{\frac{\Pi(z_\nu - \mathfrak{k}_2)}{R'(\mathfrak{k}_2)}} : \ldots : \sqrt[3]{\frac{\Pi(z_\nu - \mathfrak{k}_n)}{R'(\mathfrak{k}_n)}} : \sqrt[3]{\frac{\Pi(z_\nu - \mathfrak{k}_{n+1})}{R'(\mathfrak{k}_{n+1})}},$$

worin das durch Π bezeichnete Produkt über p Factoren zu bilden ist, die man erhält, wenn man $\nu = 1, 2 \ldots p$ der Reihe nach setzt.

§ 14. **Beweis, dass die Charakteristick von $(N_\lambda;\ \mathfrak{N}_\lambda)$ gerade ist.** Eine Theta-Function von der Form $\vartheta(u_\lambda(s, z) - e_\lambda;\ \mathfrak{u}_\lambda(s, z) - \mathfrak{e}_\lambda)$ verschwindet als Function von s, z in p Puncten, oder sie verschwindet identisch (R. pag. 149). Betrachten wir nun die Function

$$\vartheta(u_\lambda(s, z) - 2\sum_1^n u_\lambda(k_\lambda);\ \mathfrak{u}_\lambda(s, z) - 2\sum_1^n \mathfrak{u}_\lambda(k_\nu)) = \vartheta(u_\lambda(s, z) - \frac{1}{p-1}K_\lambda - \tfrac{1}{2}N_\lambda;\ \mathfrak{u}_\lambda(s, z) - \frac{1}{p-1}\mathfrak{K}_\lambda - \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda),$$

welche für $z = k_{n+1}$ in die Function $\vartheta(-\frac{1}{2}N_\lambda;\ -\frac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda)$ übergeht. Wäre nun die Charakteristick ungerade, so müsste die Function für $z = k_{n+1}$ verschwinden, und also, da sie in den n Puncten $k_1, k_2 \ldots k_n$ je zweimal, also schon p-mal verschwindet (R. pag. 149) identisch verschwinden. Es müsste dann auch eine

Digitized by Google

in T einwerthige Function existiren, die in den Puncten $k_1, k_2 \ldots k_n$ doppelt, oder in nur einigen von ihnen, in andern Puncten aber nicht unendlich wird. Dass aber eine solche Function nicht existire, haben wir I, § 18 bewiesen. Demnach muss die Charakteristick von $(N_\lambda; \mathfrak{N}_\lambda)$ gerade sein, w. z. b. w.

§ 15. Hieran schliessen wir die algebraische Darstellung der Function

$$\vartheta(u_\lambda(s,z)-2\sum_1^n u_\lambda(k_\nu);\ u_\lambda(s,z)-2\sum_1^n u_\lambda(k_\nu)) : \vartheta(u_\lambda(s,z)-2\sum_1^n u_\lambda(\mathfrak{k}_\nu);\ u_\lambda(s,z)-2\sum_1^n u_\lambda(\mathfrak{k}_\nu)).$$

Sie wird unendlich klein zweiter Ordnung für $z = k_1, k_2 \ldots k_n$ und unendlich gross zweiter Ordnung in den Puncten $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2 \ldots \mathfrak{k}_n$. Ihre Periodicität stimmt, wie man leicht sieht, mit der der Function

$$D(k_{n+1};\ \mathfrak{k}_{n+1}) \cdot \sqrt[3]{\prod_1^n (z-k_\nu)^2 : (z-\mathfrak{k}_\nu)^2}$$

überein, wenn $D(k_{n+1}, \mathfrak{k}_{n+1})$ eine Constante bedeutet, die sich so bestimmen lassen muss, dass die algebraische Function dem ϑ-Quotienten gleich wird. Für $z = k_{n+1}$ ergiebt sich hieraus die Gleichung

$$\vartheta(\tfrac{1}{2}N_\lambda;\ \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda) : \vartheta(\tfrac{1}{2}N_\lambda - \tfrac{1}{2}i\pi;\ \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda - \tfrac{1}{2}i\pi) = D(k_{n+1}, \mathfrak{k}_{n+1})\sqrt{\{P'(k_{n+1})\,(k_{n+1}-\mathfrak{k}_{n+1}) : \mathfrak{P}(k_{n+1})\}^2},$$

und für $z = \mathfrak{k}_{n+1}$ die Gleichung

$$\vartheta(\tfrac{1}{2}N_\lambda + \tfrac{1}{2}i\pi;\ \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda + \tfrac{1}{2}i\pi) : \vartheta(\tfrac{1}{2}N_\lambda;\ \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda) = D(k_{n+1}, \mathfrak{k}_{n+1})\sqrt{\{P(\mathfrak{k}_{n+1}) : \mathfrak{P}'(\mathfrak{k}_{n+1})\,(\mathfrak{k}_{n+1}-k_{n+1})\}^2},$$

und hieraus durch Multiplication mit Rücksicht auf § 7 (ohne welche Rücksicht eine sechste Wurzel der Einheit, also auch eine numerische Grösse erhalten würde

$$\frac{\vartheta(\frac{1}{2}N_\lambda - \frac{1}{2}i\pi;\ \frac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda - \frac{1}{2}i\pi)}{\vartheta(\frac{1}{2}N_\lambda + \frac{1}{2}i\pi;\ \frac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda + \frac{1}{2}i\pi)} = 1 = D^2(k_{n+1}, \mathfrak{k}_{n+1})\sqrt[3]{\frac{P'(k_{n+1})\,P(\mathfrak{k}_{n+1})}{\mathfrak{P}(k_{n+1})\,\mathfrak{P}'(\mathfrak{k}_{n+1})}},$$

$$D(k_{n+1};\ \mathfrak{k}_{n+1}) = \pm\sqrt[3]{\mathfrak{P}(k_{n+1})\,\mathfrak{P}'(\mathfrak{k}_{n+1}) : P'(k_{n+1})\,P(\mathfrak{k}_{n+1})}.$$

Somit erhalten wir schliesslich

$$\frac{\vartheta(u_\lambda(s,z)-2\sum_1^n u_\lambda(k_\nu);\ u_\lambda(s,z)-2\sum_1^n u_\lambda(k_\nu))}{\vartheta(u_\lambda(s,z)-2\sum_1^n u_\lambda(\mathfrak{k}_\nu);\ u_\lambda(s,z)-2\sum_1^n u_\lambda(\mathfrak{k}_\nu))}$$

$$= \pm\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{P}(k_{n+1})\,\mathfrak{P}'(\mathfrak{k}_{n+1})}{P(\mathfrak{k}_{n+1})\,P'(k_{n+1})}}\prod_1^n\left(\frac{z-k_n}{z-\mathfrak{k}_n}\right)^2 = \pm\sqrt[3]{\frac{R'(k_{n+1})}{R'(\mathfrak{k}_{n+1})}}\prod_1^n\left(\frac{z-k_\nu}{k_{n+1}-k_\nu}\right)^2\left(\frac{\mathfrak{k}_{n+1}-\mathfrak{k}_\nu}{z-\mathfrak{k}_\nu}\right)^2.$$

§ 16. Führt man den Punct s, z in der Fläche T herum, so ist, weil eine einwerthige Function existirt, die in drei übereinander liegenden Puncten, und sonst nirgend — nämlich die Function $z-z' : z-z''$ — unendlich wird

$$(u_\lambda(s,z)+u_\lambda(s\tau,z)+u_\lambda(s\tau^2,z);\ u_\lambda(s,z)+u_\lambda(s\tau,z)+u_\lambda(s\tau^2,z)) = (\ell'_\lambda;\ \mathfrak{C}_\lambda)$$

d. h., der Werth des Systems ist von der Lage des Punctes s, z unabhängig, und ändert sich nur beim Ueberschreiten der Querschnitte um Systeme ganzer Periodicitätsmoduln. Hieraus folgt

$$(u_\lambda(s,z) - u_\lambda(s_\nu\tau, z_\nu) - u_\lambda(s_\nu\tau^2, z_\nu);\ u_\lambda(s,z) - u_\lambda(s_\nu\tau, z_\nu) - u_\lambda(s_\nu\tau^2, z_\nu)) \equiv$$
$$(u_\lambda(s_\nu, z_\nu) - u_\lambda(s\tau, z) - u_\lambda(s\tau^2, z);\ u_\lambda(s,z) - u_\lambda(s\tau, z) - u_\lambda(s\tau^2, z)).$$

Sind nun (μ) (μ') beliebige Verzweigungspuncte, jedoch solche, dass (μ) entweder k_μ oder $\mathfrak{k}_\mu$, (μ') entweder $k_{\mu'}$ oder $\mathfrak{k}_{\mu'}$ ist, und setzen wir in einem ϑ-Quotienten, wie er im § 13 enthalten ist $s_\nu\tau$, z_ν, $s_\nu\tau^2, z_\nu$ für s_ν, z_ν bez. $s_{\nu+n}, z_{\nu+n}$, $(\nu \leq n)$, so erhalten wir

$$\frac{\vartheta(v_\lambda(\mu);\ v_\lambda(\mu'))\,e^{-\Omega_\mu + \frac{2}{3}(v_\mu(\mu) - v_\mu(\mu))}}{\vartheta(v_\lambda(\mu');\ v_\lambda(\mu'))\,e^{-\Omega_{\mu'} + \frac{2}{3}(v_{\mu'}(\mu') - v_{\mu'}(\mu'))}} = \pm\sqrt[3]{\frac{R'(\mu')}{R'(\mu)}}\prod_1^n\left(\frac{z_\nu-(\mu)}{z_\nu-(\mu')}\right)^2,$$

wenn

Digitized by Google

$$(v_\lambda(\mu);\ v_\lambda(\mu)) = (u_\lambda(\mu) - \sum_1^n u_\lambda(s_\nu\tau, z_\nu) + u_\lambda(s_\nu\tau^2, z_\nu);\ u_\lambda(\mu) - \sum_1^n u_\lambda(s_\nu\tau, z_\nu) + u_\lambda(s_\nu\tau^2, z_\nu)),$$

$$(v_\lambda(\mu');\ v_\lambda(\mu')) = (u_\lambda(\mu') - \sum_1^n u_\lambda(s_\nu\tau, z_\nu) + u_\lambda(s_\nu\tau^2, z_\nu);\ u_\lambda(\mu') - \sum_1^n u_\lambda(s_\nu\tau, z_\nu) + u_\lambda(s_\nu\tau^2, z_\nu))$$

ist, wofür man in Folge der soeben bewiesenen Congruenz, und wegen der Periodicität der ϑ-Functionen auch schreiben kann

$$(v_\lambda(\mu);\ v_\lambda(\mu)) = (u_\lambda(s_n, z_n) - \sum_1^{n-1} u_\lambda(s_\nu\tau, z_\nu) + u_\lambda(s_\nu\tau^2, z_\nu) - 2u_\lambda(\mu);\ .\ ),$$

$$(v_\lambda(\mu');\ v_\lambda(\mu')) = (u_\lambda(s_n, z_n) - \sum_1^{n-1} u_\lambda(s_\nu\tau, z_\nu) + u_\lambda(s_\nu\tau^2, z_\nu) - 2u_\lambda(\mu');\ .\ ).$$

Schreiben wir nun s, z für s_n, z_n und nehmen für $z_1, z_2 \ldots z_{n-1}$ $n-1$ von (μ) (μ') verschiedene Verzweigungspuncte $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$, so folgt hieraus

$$\frac{\vartheta(u_\lambda(s, z) - 2\sum_1^{n-1} u_\lambda(x_\nu) - 2u_\lambda(\mu);\ .\ )\ \ e^{-\Omega_\mu + \Omega'_\mu}}{\vartheta(u_\lambda(s, z) - 2\sum_1^{n-1} u_\lambda(x_\nu) - 2u_\lambda(\mu');\ .\ )\ \ e^{-\Omega_\mu + \Omega'_\mu}} = \pm\sqrt[3]{\frac{R'(\mu')}{R'(\mu)}\prod_1^{n-1}\left(\frac{x_\nu - (\mu)}{x_\nu - (\mu')}\right)^2\left(\frac{z-(\mu)}{z-(\mu')}\right)^2}.$$

Hierin ist zur Abkürzung

$$\Omega'_\mu = \tfrac{2}{3}(u_\mu(s, z) - \mathfrak{u}_\mu(s, z)) - \tfrac{1}{3}(S_\mu^{n-1} - \mathfrak{S}_\mu^{n-1} + u_\mu(\mu) - \mathfrak{u}_\mu(\mu)),$$

$$\Omega'_{\mu'} = \tfrac{2}{3}(u_{\mu'}(s, z) - \mathfrak{u}_{\mu'}(s, z)) - \tfrac{1}{3}(S_{\mu'}^{n-1} - \mathfrak{S}_{\mu'}^{n-1} + u_{\mu'}(\mu') - \mathfrak{u}_\mu(\mu')),$$

$$S_\lambda^{n-1} \text{ statt } \sum_1^{n-1} u_\lambda(x_\nu),\quad \mathfrak{S}_\lambda^{n-1} \text{ statt } \sum_1^{n-1} \mathfrak{u}_\lambda(x_\nu)$$

gesetzt.

§ 17. Nun seien $(\mu_1), (\mu_2) \ldots (\mu_\varrho)$ ϱ Verzweigungspuncte und $(\mu'_1), (\mu'_2) \ldots (\mu'_\varrho)$ ϱ andere, und zwar solche, dass (μ_ν) entweder k_{μ_ν} oder $\mathfrak{k}_{\mu_\nu}$, (μ'_ν) entweder $k_{\mu_\nu'}$ oder $\mathfrak{k}_{\mu_\nu'}$ ist, ferner sei

$$v_\lambda = \frac{3}{p-1}K_\lambda - \sum_0^{n-\varrho} u_\lambda(s_\nu\tau, z_\nu) + u_\lambda(s_\nu\tau^2, z_\nu) - 2\sum_1^{\varrho} u_\lambda(\mu_\nu),$$

$$\mathfrak{v}_\lambda = \frac{3}{p-1}\mathfrak{K}_\lambda - \sum_0^{n-\varrho} \mathfrak{u}_\lambda(s_\nu\tau, z_\nu) + \mathfrak{u}_\lambda(s_\nu\tau^2, z_\nu) - 2\sum_1^{\varrho} \mathfrak{u}_\lambda(\mu_\nu),$$

$$v'_\lambda = \frac{3}{p-1}K_\lambda - \sum_0^{n-\varrho} u_\lambda(s_\nu\tau, z_\nu) + u_\lambda(s_\nu\tau^2, z_\nu) - 2\sum_1^{\varrho} u_\lambda(\mu'_\nu),$$

$$\mathfrak{v}'_\lambda = \frac{3}{p-1}\mathfrak{K}_\lambda - \sum_0^{n-\varrho} \mathfrak{u}_\lambda(s_\nu\tau, z_\nu) + \mathfrak{u}_\lambda(s_\nu\tau^2, z_\nu) - 2\sum_1^{\varrho} \mathfrak{u}_\lambda(\mu'_\nu).$$

Dann findet die Gleichung statt

$$\frac{\vartheta(v_\lambda;\ \mathfrak{v}_\lambda)}{\vartheta(v'_\lambda;\ \mathfrak{v}'_\lambda)} \cdot \frac{e^{\frac{2}{3}\sum_1^{\varrho}(v_{\mu_\nu} - \mathfrak{v}_{\mu_\nu})}}{e^{\frac{2}{3}\sum_1^{\varrho}(v'_{\mu_\nu} - \mathfrak{v}'_{\mu_\nu})}} = C \cdot \sqrt[3]{\prod_0^{n-\varrho}\left[\frac{z_\nu - (\mu_1)}{z_\nu - (\mu'_1)} \cdot \frac{z_\nu - (\mu_2)}{z_\nu - (\mu'_2)} \cdots \frac{z_\nu - (\mu_\varrho)}{z_\nu - (\mu'_\varrho)}\right]^2},$$

worin C von $z_0, z_1 \ldots z_{n-\varrho}$ unabhängig ist. Beide Seiten nämlich sind Functionen, deren dritte Potenzen in T einwerthig sind, und die als Functionen von $z_0, z_1 \ldots z_{n-\varrho}$ in denselben Puncten und in derselben Ordnung unendlich werden und verschwinden, weshalb sie nur um einen constanten Factor von einander

Digitized by Google

verschieden sein können. Die von $(\mu_1), (\mu_2) \ldots (\mu_\varrho), (\mu_1') \ldots (\mu_\varrho')$ verschiedenen Verzweigungspuncte seien nun $(\mu_{\varrho+1}), (\mu_{\varrho+2}) \ldots (\mu_{n+1}), (\mu'_{\varrho+1}), (\mu'_{\varrho+2}) \ldots (\mu'_{n+1})$, und es sei zur augenblicklichen Abkürzung

$$W_\lambda = \frac{3}{p-1} K_\lambda - 2\sum_1^\varrho u_\lambda(\mu_\nu) - 2\sum_{\varrho+1}^{n+1} u_\lambda(\mu_\nu'); \quad \mathfrak{W}_\lambda = \frac{3}{p-1}\mathfrak{K}_\lambda - 2\sum_1^\varrho u_\lambda(\mu_\nu) - 2\sum_{\varrho+1}^{n+1} u_\lambda(\mu_\nu'),$$

$$W_\lambda' = \frac{3}{p-1} K_\lambda - 2\sum_1^\varrho u_\lambda(\mu_\nu') - 2\sum_{\varrho+1}^{n+1} u_\lambda(\mu_\nu); \quad \mathfrak{W}_\lambda' = \frac{3}{p-1}\mathfrak{K}_\lambda - 2\sum_1^\varrho u_\lambda(\mu_\nu') - 2\sum_{\varrho+1}^{n+1} u_\lambda(\mu_\nu),$$

$$V_\lambda = \frac{3}{p-1} K_\lambda - 2\sum_1^{n+1} u_\lambda(\mu_\nu); \quad \mathfrak{V}_\lambda = \frac{3}{p-1}\mathfrak{K}_\lambda - 2\sum_1^{n+1} u_\lambda(\mu_\nu),$$

$$V_\lambda' = \frac{3}{p-1} K_\lambda - 2\sum_1^{n+1} u_\lambda(\mu_\nu'); \quad \mathfrak{V}_\lambda' = \frac{3}{p-1}\mathfrak{K}_\lambda - 2\sum_1^{n+1} u_\lambda(\mu_\nu'),$$

so ergeben sich aus der oben aufgestellten Gleichung die beiden folgenden

$$\frac{\vartheta(V_\lambda; \mathfrak{V}_\lambda)\, e^{-\frac{1}{3}\sum_1^\varrho (V_{\mu_\nu} - \mathfrak{V}_{\mu_\nu})}}{\vartheta(W_\lambda'; \mathfrak{W}_\lambda')\, e^{-\frac{1}{3}\sum_1^\varrho (W'_{\mu_\nu'} - \mathfrak{W}'_{\mu_\nu'})}} = C\sqrt[3]{\prod_0^{n-\varrho}(\nu) \prod_1^\varrho (\nu') \left[\frac{(\mu_{\varrho+\nu+1}) - (\mu_{\nu'})}{(\mu_{\varrho+\nu+1}) - (\mu'_{\nu'})}\right]^2},$$

$$\frac{\vartheta(W_\lambda; \mathfrak{W}_\lambda)\, e^{-\frac{1}{3}\sum_1^\varrho (W_{\mu_\nu} - \mathfrak{W}_{\mu_\nu})}}{\vartheta(V_\lambda'; \mathfrak{V}_\lambda')\, e^{-\frac{1}{3}\sum_1^\varrho (V'_{\mu_\nu'} - \mathfrak{V}'_{\mu_\nu'})}} = C\sqrt[3]{\prod_0^{n-\varrho}(\nu) \prod_1^\varrho (\nu') \left[\frac{(\mu'_{\varrho+\nu+1}) - (\mu_{\nu'})}{(\mu'_{\varrho+\nu+1}) - (\mu'_{\nu'})}\right]^2}.$$

Bildet man nun das Produkt der beiden Gleichungen, berücksichtigt I § 30 und II § 7, und den Umstand dass die ϑ-Function eine gerade Function ist, und zieht man noch die Quadratwurzel aus, so erhält man

$$\frac{e^{-\frac{1}{3}\sum_1^\varrho (V_{\mu_\nu} - \mathfrak{V}_{\mu_\nu} - V'_{\mu'_\nu} + \mathfrak{V}'_{\mu'_\nu})}}{e^{-\frac{1}{3}\sum_1^\varrho (\mathfrak{W}_{\mu_\nu} - W_{\mu_\nu} - W'_{\mu'_\nu} + \mathfrak{W}'_{\mu'_\nu})}} = \pm C\sqrt[3]{\prod_0^{n-\varrho}(\nu) \prod_1^\varrho (\nu') \frac{(\mu_{\varrho+\nu+1}) - (\mu_{\nu'})}{(\mu_{\varrho+\nu+1}) - (\mu'_{\nu'})} \cdot \frac{(\mu'_{\varrho+\nu+1}) - (\mu_{\nu'})}{(\mu'_{\varrho+\nu+1}) - (\mu'_{\nu'})}}.$$

oder wenn man mit $P(\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_\varrho)$ das Produkt der Differenzen der Verzweigungspuncte $(\mu_1), (\mu_2), \ldots (\mu_\varrho)$ mit allen übrigen von ihnen verschiedenen Verzweigungspuncten bezeichnet

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}\Omega \mu_1, \mu_2 \ldots \mu_\varrho}}{e^{-\frac{1}{2}\Omega \mu_1', \mu_2' \ldots \mu_\varrho'}} = \pm C\sqrt[3]{\frac{P(\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_\varrho)}{P(\mu_1', \mu_2' \ldots \mu_\varrho')}},$$

$$\Omega \mu_1, \mu_2 \ldots \mu_\varrho = -\frac{1}{2}\sum_1^\varrho (N_{\mu_\nu} - \mathfrak{N}_{\mu_\nu}) + \frac{1}{2}\sum_1^\varrho (\nu) \sum_1^\varrho (\nu') (a_{\mu_\nu \mu_{\nu'}} - \bar{a}_{\mu_\nu \mu_{\nu'}} - a_{\mu_\nu \mu_{\nu'}} + \bar{a}_{\mu_\nu \mu_{\nu'}}),$$

und so erhalten wir schliesslich die Gleichung

$$\frac{\vartheta(v_\lambda; \mathfrak{v}_\lambda)\, e^{\frac{1}{2}\Omega \mu_1, \mu_2 \ldots \mu_\varrho - \frac{1}{3}\sum_1^\varrho (v_{\mu_\nu} - \mathfrak{v}_{\mu_\nu})}}{\vartheta(v_\lambda'; \mathfrak{v}_\lambda')\, e^{\frac{1}{2}\Omega \mu_1', \mu_2' \ldots \mu_\varrho' - \frac{1}{3}\sum_1^\varrho (v'_{\mu_\nu'} - \mathfrak{v}'_{\mu_\nu'})}} = \pm\sqrt[3]{\frac{P(\mu_1', \mu_2' \ldots \mu_\varrho')}{P(\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_\varrho)} \prod_0^{n-\varrho}(\nu) \prod_1^\varrho (\nu') \left[\frac{z_\nu - (\mu_{\nu'})}{z_\nu - (\mu'_{\nu'})}\right]^2},$$

wobei zu bemerken ist, dass μ_ν, $\mu_{\nu'}$ Verzweigungspuncte mit gleichen Indices bedeuten können, indem sie die verschiedenen Puncte desselben Paares sind.

Digitized by Google

Somit sind nun alle Functionen von der Periodicität der Function

$$\sqrt[3]{(z-a)\,(z-b)\,\ldots\,(z-m) : (z-a')\,(z-b')\,\ldots\,(z-m')},$$

worin $a, b \ldots m, a', b' \ldots m'$ Verzweigungspuncte sind, und zwar in solcher Zahl, dass die Anzahl der im Zähler stehenden sich von der im Nenner stehenden nur durch ein Multiplum von 3 unterscheidet, durch ϑ-Quotienten dargestellt, weil I § 44 bewiesen ist, dass alle diese Functionen abgesehen von einem einwerthigen Factor in die Form gebracht werden können

$$\sqrt[3]{\left[\frac{z-x_1}{z-x_1'}\,\frac{z-x_2}{z-x_2'}\ldots\frac{z-x_n}{z-x_n'}\right]^2},$$

worin von den Grössen x beliebig viele den Grössen x' gleich sein können.

§ 18. Besteht die Congruenz

$$(u_\lambda(x_\mu)-u_\lambda(x_{\mu'});\ u_\lambda(x_\mu)-u_\lambda(x_{\mu'})) \equiv \tfrac{1}{2}(a_{\lambda\mu}-\bar a_{\lambda\mu}+\bar a_{\lambda\mu'}-a_{\lambda\mu'}+g_\lambda i\pi;\ a_{\lambda\mu}-\bar a_{\lambda\mu}+\bar a_{\lambda\mu'}-a_{\lambda\mu'}+g_\lambda i\pi)$$

und wird

$$(v_\lambda;\ v_\lambda) = (u_\lambda(s,z)-\sum_1^p u_\lambda(s_\nu, z_\nu);\quad u_\lambda(s,z)-\sum_1^p u_\lambda(s_\nu, z_\nu))$$

gesetzt, und ist x_μ entweder k_μ oder $\mathfrak{k}_\mu$, $x_{\mu'}$ entweder $k_{\mu'}$ oder $\mathfrak{k}_{\mu'}$, so stimmt die Periodicität der Function

$$\frac{\vartheta(v_\lambda+\tfrac{1}{2}(a_{\lambda\mu}-\bar a_{\lambda\mu}+\bar a_{\lambda\mu'}-a_{\lambda\mu'})+\tfrac{1}{2}g_\lambda i\pi;\ .\ )}{\vartheta(v_\lambda;\ v_\lambda)}\cdot\frac{e^{-\Omega_\mu+\frac{2}{3}(v_\mu-v_\mu)}}{e^{-\Omega_{\mu'}+\frac{2}{3}(v_{\mu'}-v_{\mu'})}}$$

als Function von s, z mit der Periodicität der Function $\sqrt[3]{(z-x_\mu):(z-x_{\mu'})}$ völlig überein, und es kann demnach in dem I § 46 definirten Ausdrucke

$$A\sqrt[3]{\frac{z-x_\mu}{z-x_{\mu'}}\cdot\frac{z_1-x_\mu}{z_1-x_{\mu'}}\ldots\frac{z_p-x_\mu}{z_p-x_{\mu'}}}\cdot\Phi(s,z;\ s_1,z_1;\ \ldots;\ s_p,z_p;\ x_\mu \mid x_{\mu'})$$

welcher dieselbe Periodicität hat, die von z unabhängige Grösse A so eingerichtet werden, dass er sich von dem obigen Quotienten nicht unterscheidet. Setzen wir deshalb die beiden Ausdrücke einander gleich, und hernach $z = x_{\mu'}$ so erhalten wir eine der II § 13 aufgestellten Functionen und daher die Gleichung

$$A\sqrt[3]{\frac{z_1-x_\mu}{z_1-x_{\mu'}}\cdot\frac{z_2-x_\mu}{z_2-x_{\mu'}}\ldots\frac{z_p-x_\mu}{z_p-x_{\mu'}}}\cdot\lim_{z-x_{\mu'}}\sqrt[3]{\frac{z-x_\mu}{z-x_{\mu'}}}\cdot\Phi(s,z;\ s_1,z_1;\ \ldots;\ s_p,z_p;\ x_\mu \mid x_{\mu'})$$
$$= \pm\sqrt[3]{\frac{R'(x_{\mu'})}{R'(x_\mu)}\cdot\frac{z_1-x_\mu}{z_1-x_{\mu'}}\cdot\frac{z_2-x_\mu}{z_2-\tau_{\mu'}}\ldots\frac{z_p-x_\mu}{z_p-x_{\mu'}}}.$$

Nun ist aber in I § 8 der limes auf der linken Seite dieser Gleichung der Eins gleich gesetzt worden, und folglich ist $AAA = R'(x_{\mu'}) : R'(x_\mu)$, so dass die Gleichung erhalten wird:

$$\frac{\vartheta(v_\lambda+\tfrac{1}{2}(a_{\lambda\mu}-\bar a_{\lambda\mu}-a_{\lambda\mu'}+\bar a_{\lambda\mu'})+\tfrac{1}{2}g_\lambda i\pi;\ .\ )}{\vartheta(v_\lambda;\ v_\lambda)}\cdot\frac{e^{-\Omega_\mu+\frac{2}{3}(v_\mu-v_\mu)}}{e^{-\Omega_{\mu'}+\frac{2}{3}(v_{\mu'}-v_{\mu'})}}$$
$$= \pm\sqrt[3]{\frac{R'(x_{\mu'})}{R'(x_\mu)}\cdot\prod_0^p\frac{z_\nu-x_\mu}{z_\nu-x_{\mu'}}}\cdot\Phi(s,z;\ s_1,z_1;\ \ldots;\ s_p,z_p;\ x_\mu \mid x_{\mu'}),$$

wenn $z_0 = z$ genommen wird.

§ 19. Etwas einfacher wird die Gleichung des vorigen Paragraphen wenn $s_\nu\tau$, z_ν für s_ν, z_ν, und $s_\nu\tau^2$, z_ν für $s_{\nu+n}$, $z_{\nu+n}$ geschrieben wird, indem dann in der Bezeichnung des § 12 in I die rechte Seite den Werth ($z_0 = z$ genommen)

$$\pm\sqrt[3]{\frac{R'(x_{\mu'})}{R'(x_{\mu'})}\prod_0^n\left(\frac{z_\nu-x_{\mu'}}{z_\nu-x_\mu}\right)^2}\cdot\Psi(z, z_1, \ldots z_n, x_{\mu'} \mid x_\mu)$$

erhält, wenn die in Ψ noch willkürliche Constante so bestimmt wird, dass

Digitized by Google

$$\lim_{z = x_\mu} \sqrt[3]{\left(\frac{z - x_{\mu'}}{z - x_\mu}\right)^2}\, \Psi(z, z_1, \ldots z_n, x_{\mu'} \mid x_\mu) = 1$$

ist.

§ 20. Ist nun wieder $(v_\lambda; v_\lambda) = (u_\lambda(s, z) - \sum_1^p u_\lambda(s_\nu, z_\nu),\ u_\lambda(s, z) - \sum_1^p u_\lambda(s_\nu, z_\nu))$ und sind h, g ganze Zahlen, so kann man auch die Function

$$\frac{\vartheta(v_\lambda + \frac{1}{2}\sum_1^p h_\nu(a_{\lambda\nu} - \bar{a}_{\lambda\nu}) + \frac{1}{2} g_\lambda i\pi;\ v_\lambda + \frac{1}{2}\sum_1^p h_\nu(a_{\lambda\nu} - \bar{a}_{\lambda\nu}) + \frac{1}{2} g_\lambda i\pi)}{\vartheta(v_\lambda; v_\lambda)\, e^{\frac{1}{2}\sum_1^n h_\nu(v_\nu - v_\nu)}}$$

algebraisch darstellen. Wie schon oben bemerkt und I § 44 bewiesen ist, giebt es immer, wenn unter $(\mu_1), (\mu_2) \ldots (\mu'_1) \ldots (\mu'_\varrho)$ Verzweigungspuncte verstanden werden, eine Function

$$\sqrt[3]{z - (\mu'_1) \,.\, z - (\mu'_2) \ldots z - (\mu'_\varrho) : z - (\mu_1) \,.\, z - (\mu_2) \ldots z - (\mu_\varrho)}$$

die wie der vorliegende ϑ-Quotient periodisch ist. Construirt man nun eine in T einwerthige Function χ die in den p Puncten $s_1, z_1, s_2, z_2 \ldots s_p, z_p$ und den ϱ Verzweigungspuncten $(\mu'_1)\ (\mu'_2) \ldots (\mu'_\varrho)$ in der ersten Ordnung unendlich gross wird, und in den Puncten $(\mu_1), (\mu_2) \ldots (\mu_\varrho)$ in der ersten Ordnung verschwindet, so kann sich der ϑ-Quotient von

$$\chi \cdot \sqrt[3]{\frac{z - (\mu'_1)}{z - (\mu_1)} \cdot \frac{z - (\mu'_2)}{z - (\mu_2)} \cdots \frac{z - (\mu'_\varrho)}{z - (\mu_\varrho)}}$$

nur durch einen von z unabhängigen Factor unterscheiden. Die Mittel zur Construction der Functionen χ sind im Theil I dieser Schrift vollständig enthalten, hingegen bringt die Auswerthung des von z unabhängigen Factors im Allgemeinen Complicationen mit sich. Wir beschränken uns deshalb hier in der Darstellung auf den Fall, in welchem die Puncte s_ν, z_ν paarweise in T übereinander liegen, in welchem wir die Darstellungsform etwas abändern.

§ 21. Ist also hier

$$(v'_\lambda; v'_\lambda) = \left(\frac{3}{p-1} K_\lambda - \sum_0^n u_\lambda(s_\nu\tau, z_\nu) + u_\lambda(s_\nu\tau^2, z_\nu);\ \frac{3}{p-1}\mathfrak{K}_\lambda - \sum_0^n u_\lambda(s_\nu\tau, z_\nu) + u_\lambda(s_\nu\tau^2, z_\nu)\right).$$

$$(v_\lambda; v_\lambda) = (v'_\lambda + \tfrac{1}{2}\sum_1^n h_\nu(a_{\lambda\nu} - a_{\lambda\nu}) + \tfrac{1}{2} g_\lambda i\pi;\ v'_\lambda + \tfrac{1}{2}\sum_1^n h_\nu(a_{\lambda\nu} - \bar{a}_{\lambda\nu}) + \tfrac{1}{2} g_\lambda i\pi)$$

so ist

$$C \,.\, \frac{\vartheta(v_\lambda; v_\lambda)\, e^{\frac{1}{2}\sum_1^n h_\nu(v'_\nu - v'_\nu)}}{\vartheta(v'_\lambda; v'_\lambda)} =$$

$$\sqrt[3]{\prod_1^{(\varrho)}{}_{(\nu)} \prod_0^{n}{}_{(\nu')} \left(\frac{z_{\nu'} - (\mu_\nu)}{z_{\nu'} - (\mu'_\nu)}\right)^2} \,.\, \Psi(z, z_1, z_2, \ldots z_n, (\mu_1), (\mu_2) \ldots (\mu_\varrho) \mid (\mu'_1), (\mu'_2) \ldots (\mu'_\varrho))$$

wenn Ψ dieselbe Bedeutung als in I § 12[a] hat. Um die von z unabhängige Grösse C zu bestimmen, setzen wir $z_{n-\varrho+2} = (\mu'_1)$, $z_{n-\varrho+2} = (\mu'_2)$, ..., $z_n = (\mu'_\varrho)$. Dann gehen v'_λ, v'_λ, v_λ, v_λ in die ebenso bezeichneten Ausdrücke des § 17 über. Wenn wir daher die in Ψ noch willkürliche Constante durch die Gleichung bestimmen

$$\lim \sqrt[3]{\prod_{n-\varrho+1}^{n}{}_{(\nu')} \prod_1^{\varrho}{}_{(\nu)} \frac{z_{\nu'} - (\mu_\nu)}{z_{\nu'} - (\mu'_\nu)}} \,.\, \Psi(z, z_1, \ldots z_n, (\mu_1), \ldots (\mu_\varrho) \mid (\mu'_1), \ldots (\mu'_\varrho)) = 1$$

in der $z_{n-\varrho+1}$ zur Grenze (μ'_1), $z_{n-\varrho+1}$ zur Grenze (μ'_2), ..., z_n zur Grenze (μ_ϱ) übergehen soll, so erhalten wir, wenn wir die Zahlen h, g mittels der Periodicität auf ihre kleinsten positiven Werthe bringen

Digitized by Google

$$\frac{\vartheta(v_\lambda,\ v_\lambda)\ e^{-\Omega\mu_1\mu_2\ldots\mu_\varrho+\frac{1}{3}\sum_1^\varrho(v_{\mu_\nu}-v_{\mu_\nu})}}{\vartheta(v'_\lambda,\ v'_\lambda)\ e^{-\Omega\mu'_1\mu'_2\ldots\mu'_\varrho+\frac{1}{3}\sum_1^\varrho(v_{\mu'_\nu}-v_{\mu'_\nu})}}$$

$$= \pm\sqrt[3]{\frac{P((\mu'_1),\ (\mu'_2),\ \ldots\ (\mu'_\varrho))}{P((\mu_1),\ (\mu_2),\ \ldots\ (\mu_\varrho))}\ \prod_1^\varrho(\nu)\prod_1^n(\nu')\left[\frac{z_{\nu'}-(\mu_\nu)}{z_{\nu'}-(\mu'_\nu)}\right]^2}\ .\ \Psi(z, z_1, \ldots z_n,\ (\mu_1), \ldots (\mu_\varrho)\mid(\mu'_1)\ldots(\mu'_\varrho)).$$

Es mag bemerkt werden dass die Functionen Ψ die hier gebraucht wurden und in I § 12 in Form eines Determinantenquotienten dargestellt wurden, eine Vereinfachung dieser Form zulassen. Es ist nämlich

$$\Psi(z_0, z_1, z_2, \ldots z_n,\ x\mid k) = \sum_0^n \mathfrak{s}_\nu P_\nu \frac{k-z_0}{z_\nu-z_0}\cdot\frac{k-z_1}{z_\nu-z_1}\cdot\ldots\cdot\frac{k-z_{\nu-1}}{z_\nu-z_{\nu-1}}\cdot\frac{k-z_{\nu+1}}{z_\nu-z_{\nu+1}}\cdot\ldots\cdot\frac{k-z_n}{z_\nu-z_n}\cdot\frac{k-x}{z_\nu-x},$$

$$\Psi(z_0, z_1, z_2, \ldots z_n,\ x\mid \mathfrak{k}) = \sum_0^n s_\nu \mathfrak{P}_\nu \frac{\mathfrak{k}-z_0}{z_\nu-z_0}\cdot\frac{\mathfrak{k}-z_1}{z_\nu-z_1}\cdot\ldots\cdot\frac{\mathfrak{k}-z_{\nu-1}}{z_\nu-z_{\nu-1}}\cdot\frac{\mathfrak{k}-z_{\nu+1}}{z_\nu-z_{\nu+1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\mathfrak{k}-z_n}{z_\nu-z_n}\cdot\frac{\mathfrak{k}-x}{z_\nu-x}.$$

Das Verschwinden der partiellen Differentialquotienten der ϑ-Functionen.

§ 22. Da die Gleichung besteht

$$\vartheta\left(\frac{3}{p-1}K_\lambda - 2\sum_1^{n+1}u_\lambda(\mathfrak{k}_\nu);\ \frac{3}{p-1}\mathfrak{K}_\lambda - 2\sum_1^{n+1}\mathfrak{u}_\lambda(\mathfrak{k}_\nu)\right) = \vartheta(N_\lambda;\ \mathfrak{N}_\lambda)$$

und sich diese Function, wenn man von den Voraussetzungen des § 7 absieht, von $\vartheta\begin{matrix}c_\lambda;\ \mathfrak{c}_\lambda\\ d_\lambda;\ \mathfrak{d}_\lambda\end{matrix}(0;\ 0)$ nur durch einen Exponentialfactor unterscheidet, wie aus II § 2 hervorgeht, und da die partiellen Differentialquotienten der Function $\vartheta\begin{matrix}c_\lambda;\ \mathfrak{c}_\lambda\\ d_\lambda;\ \mathfrak{d}_\lambda\end{matrix}(v_\lambda;\ \mathfrak{v}_\lambda)$ mit den Argumenten verschwinden, weil sie nach § 14 gerade ist, so ist es offenbar, dass man $\vartheta(v_\lambda;\ \mathfrak{v}_\lambda)$ mit einer solchen Exponentialfunction F multipliciren kann, dass die partiellen Differentialquotienten des Productes verschwinden, wenn $(v_\lambda;\ \mathfrak{v}_\lambda) = (N_\lambda;\ \mathfrak{N}_\lambda)$ wird. Es kann aber allgemeiner gezeigt werden, dass man stets einen Factor e^H finden kann von der Beschaffenheit, dass die partiellen Differentialquotienten von $e^H\vartheta(v_\lambda;\ \mathfrak{v}_\lambda)$ für

$$(v_\lambda;\ \mathfrak{v}_\lambda) = \left(\frac{3}{p-1}K_\lambda - 2\sum_1^{n+1}u_\lambda(x_\nu);\ \frac{3}{p-1}\mathfrak{K}_\lambda - 2\sum_1^{n+1}\mathfrak{u}_\lambda(x_\nu)\right)$$

verschwinden, wenn $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ beliebige von einander verschiedene Verzweigungspuncte sind. Dabei wird im Allgemeinen bei andern Verzweigungspuncten die Grösse H, die eine lineare Function der v und $\mathfrak{v}$ ist, eine andere sein. Setzen wir hier um abzukürzen

$$(v_\lambda(x_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(x_\mu)) =$$

$$\left(\frac{3}{\mu-1}K_\lambda - 2u_\lambda(x_\mu) - \sum_1^n u_\lambda(s_\nu\tau, z_\nu) + u_\lambda(s_\nu\tau^2, z_\nu);\ \frac{3}{p-1}\mathfrak{K}_\lambda - 2\mathfrak{u}_\lambda(x_\mu) - \sum_1^n \mathfrak{u}_\lambda(s_\nu\tau, z_\nu) + \mathfrak{u}_\lambda(s_\nu\tau^2, z_\nu)\right)$$

$$U = \frac{\vartheta(v_\lambda(x_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(x_\mu))\ e^{-\Omega_\mu+\frac{1}{3}(v_\mu(x_\mu)-\mathfrak{v}_\mu(x_\mu))}}{\vartheta(v_\lambda(x_{\mu'});\ \mathfrak{v}_\lambda(x_{\mu'}))\ e^{-\Omega_{\mu'}+\frac{1}{3}(v_{\mu'}(x_{\mu'})-\mathfrak{v}_{\mu'}(x_{\mu'}))}},$$

worin x_μ entweder k_μ oder $\mathfrak{k}_\mu$, $x_{\mu'}$ entweder $k_{\mu'}$ oder $\mathfrak{k}_{\mu'}$ ist, so erhalten wir aus II § 16 durch logarithmische Differentiation

$$\frac{\partial\lg U}{\partial z_\varrho} = \tfrac{2}{3}\frac{1}{z_\varrho-x_\mu} - \tfrac{2}{3}\frac{1}{z_\varrho-x_{\mu'}} =$$

$$\frac{i\pi}{s_\varrho\mathfrak{P}_\varrho}\sum_1^n\frac{f_\nu(z_\varrho)}{1-\tau^2}\left(\frac{\partial\lg U}{\partial v_\nu}+\tau\frac{\partial\lg U}{\partial\mathfrak{v}_\nu}\right)+\frac{i\pi}{\mathfrak{s}_\varrho P_\varrho}\sum_1^n\frac{\mathfrak{f}_\nu(z_\varrho)}{1-\tau^2}\left(\tau\frac{\partial\lg U}{\partial v_\nu}+\frac{\partial\lg U}{\partial\mathfrak{v}_\nu}\right).$$

Digitized by Google

Macht man hierin $z_\varrho = k_\varrho$ und nimmt k_ϱ von x_μ, $x_{\mu'}$ verschieden an, so erhält man die Gleichung

$$\sum_1^n \mathfrak{f}_\nu(k_\varrho)\left(\frac{\partial \lg U}{\partial v_\nu}\tau + \frac{\partial \lg U}{\partial \mathfrak{v}_\varrho}\right) = 0.$$

Macht man aber $z_\varrho = \mathfrak{k}_\varrho$ und nimmt ebenso $\mathfrak{k}_\varrho$ von x_μ, $x_{\mu'}$ verschieden an, so erhält man die Gleichung

$$\sum_1^n f_\nu(\mathfrak{k}_\varrho)\left(\frac{\partial \lg U}{\partial v_\nu} + \tau\frac{\partial \lg U}{\partial \mathfrak{v}_\nu}\right) = 0.$$

Wird nun der Reihe nach ϱ gleich $1, 2, \ldots n$ gesetzt, und dann $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2, \ldots z_n = x_n$ worin die $x_1, x_2 \ldots$ willkürliche von einander und von x_μ, $x_{\mu'}$ verschiedene Verzweigungspuncte sind, aber nur die speciellen Indices μ, μ' auf Verzweigungspuncte des μten und μ'ten Paares hinweisen, so erhält man n Gleichungen, in denen die Grössen $\frac{\partial \lg U}{\partial v_\nu}$, $\frac{\partial \lg U}{\partial \mathfrak{v}_\nu}$ dieselben sind. Ersetzt man sodann die Puncte $x_1, x_2 \ldots x_n$ durch die übrigen von ihnen und von x_μ, $x_{\mu'}$ verschiedenen Verzweigungspuncte, und vertauscht x_μ mit $x_{\mu'}$, so erhält man n neue Gleichungen mit denselben Unbekannten $\frac{\partial U}{\partial v_\nu}$, $\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{v}_\nu}$. Man hat also im Ganzen p homogene Gleichungen mit p Unbekannten, nämlich den Grössen

$$\frac{\partial \lg U}{\partial v_\nu}\tau + \frac{\partial \lg U}{\partial \mathfrak{v}_\nu}, \quad \frac{\partial \lg U}{\partial v_\nu} + \tau\frac{\partial \lg U}{\partial \mathfrak{v}_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots n.$$

Da aber die Determinante der f sowohl, als der $\mathfrak{f}$ nicht verschwinden kann (conf. Crelle's Journal B. 75 pag. 224), so müssen die Unbekannten alle Null sein, und es muss daher auch

$$\frac{\partial \lg U}{\partial v_1} = \frac{\partial \lg U}{\partial \mathfrak{v}_2} = \ldots \frac{\partial \lg U}{\partial v_n} = \frac{\partial \lg U}{\partial \mathfrak{v}_1} = \ldots \frac{\partial \lg U}{\partial \mathfrak{v}_\nu} = 0$$

sein.

§ 23. Das Resultat des vorigen Paragraphen lässt sich nun so schreiben. — Ist

$$(v_\lambda(x_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(x_\mu)) = (u_\lambda(x_\mu) - 2\sum_1^n u_\lambda(x_\nu);\ \mathfrak{u}_\lambda(x_\mu) - 2\sum_1^n \mathfrak{u}_\lambda(x_\nu))$$

$$(v_\lambda(x_{\mu'});\ \mathfrak{v}_\lambda(x_{\mu'})) = (u_\lambda(x_{\mu'}) - 2\sum_1^n u_\lambda(x_\nu);\ \mathfrak{u}_\lambda(x_{\mu'}) - 2\sum_1^n \mathfrak{u}_\lambda(x_\nu))$$

und sind $x_1, x_2 \ldots x_n$ von x_μ, $x_{\mu'}$ verschieden, und ist x_μ entweder gleich k_μ oder gleich $\mathfrak{k}_\mu$, $x_{\mu'}$ entweder gleich $k_{\mu'}$ oder gleich $\mathfrak{k}_{\mu'}$, während die Indices der übrigen x nicht auf die entsprechenden k oder $\mathfrak{k}$ hinzuweisen brauchen, und ist

$$W = -\sum_1^n c_\nu v_\nu + \mathfrak{c}_\nu \mathfrak{v}_\nu$$

so bestehen für ϱ gleich $1, 2 \ldots n$ die Gleichungen

$$\frac{\frac{\partial}{\partial v_\varrho} e^{\frac{2}{3}(v_\mu(x_\mu) - \mathfrak{v}_\mu(x_\mu)) + W} \cdot \vartheta(v_\lambda(x_\mu);\ (\mathfrak{v}_\lambda(x_\mu))}{e^{\frac{2}{3}(v_\mu(x_\mu) - \mathfrak{v}_\mu(x_\mu))} \cdot \vartheta(v_\lambda(x_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(x_\mu))} = \frac{\frac{\partial}{\partial v_\varrho} e^{\frac{2}{3}(v_{\mu'}(x_{\mu'}) - \mathfrak{v}_{\mu'}(x_{\mu'})) + W} \cdot \vartheta(v_\lambda(x_{\mu'});\ \mathfrak{v}_\lambda(x_{\mu'}))}{e^{\frac{2}{3}(v_{\mu'}(x_{\mu'}) - \mathfrak{v}_{\mu'}(x_{\mu'}))} \cdot \vartheta(v_\lambda(x_{\mu'});\ \mathfrak{v}_\lambda(x_{\mu'}))},$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}_\varrho} e^{\frac{2}{3}(v_\mu(x_\mu) - \mathfrak{v}_\mu(x_\mu)) + W} \cdot \vartheta(v_\lambda(x_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(x_\mu))}{e^{\frac{2}{3}(v_\mu(x_\mu) - \mathfrak{v}_\mu(x_\mu)) + W} \cdot \vartheta(v_\lambda(x_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(x_\mu))} = \frac{\frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}_\varrho} e^{\frac{2}{3}(v_{\mu'}(x_{\mu'}) - \mathfrak{v}_{\mu'}(x_{\mu'})) + W} \cdot \vartheta(v_\lambda(x_{\mu'});\ \mathfrak{v}_\lambda(x_{\mu'}))}{e^{\frac{2}{3}(v_{\mu'}(x_{\mu'}) - \mathfrak{v}_{\mu'}(x_{\mu'})) + W} \cdot \vartheta(v_\lambda(x_{\mu'});\ \mathfrak{v}_\lambda(x_{\mu'}))}.$$

Diese Gleichungen würden übrigens bestehen, was für eine Function von v und $\mathfrak{v}$, W auch wäre. Hier ist W so gewählt, dass die partiellen Differentialquotienten von $e^W\vartheta(v_\lambda - \frac{1}{2}N_\lambda;\ \mathfrak{v}_\lambda - \frac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda)$ mit den Argumenten verschwinden. Da sich später für c, $\mathfrak{c}$, d, $\mathfrak{d}$ die Werthe Null ergeben, so mag die Function W fortgelassen werden. Weil nun die partiellen Differentialquotienten der Functionen

Digitized by Google

$$\vartheta(-N_\lambda; -\mathfrak{N}_\lambda) = \vartheta(u_\lambda(\mathfrak{k}_{n+1}) - 2\sum_1^n u_\lambda(\mathfrak{k}_\nu);\ u_\lambda(\mathfrak{k}_{n+1}) - 2\sum_1^n u_\lambda(\mathfrak{k}_\nu)),$$

$$\vartheta(u_\lambda(k_{n+1}) - 2\sum_1^n u_\lambda(k_\lambda);\ u_\lambda(k_{n+1}) - 2\sum_1^n u_\lambda(k_\nu))$$

verschwinden, so müssen auch die partiellen Differentialquotienten der Functionen

$$e^{\frac{1}{2}(v_\mu - v_\mu)} \cdot \vartheta(u_\lambda(k_\mu) - 2\sum_1^n u_\lambda(\mathfrak{k}_\nu);\ u_\lambda(k_\mu) - 2\sum_1^n u_\lambda(\mathfrak{k}_\nu)),\quad e^{\frac{1}{2}(v_\mu - v_\mu)} \cdot \vartheta(u_\lambda(\mathfrak{k}_\mu) - 2\sum_1^n u_\lambda(k_\nu);\ .\ )$$

verschwinden. Diese Fälle mögen genügen und es mag dem Leser überlassen bleiben durch successive Anwendung derselben Methode das Verschwinden der partiellen Differentialquotienten in dem allgemeinen im § 22 angeführten Falle nachzuweisen.

---

§ 24. Bevor wir zur Darstellung der Integrale zweiter Gattung durch Thetafunctionen schreiten, bilden wir noch zwei algebraische Formen derselben, die passender ihren Platz hinter § 39 des Theiles I haben würden, deren Bedürfniss sich aber erst hier ergab. Wir haben dort

$$t(s, z;\ \sigma, \zeta) - \frac{P(\zeta)\,\mathfrak{P}(z)\,s^2 + P(\zeta)\,\mathfrak{P}(z)\,s\,\sigma + \mathfrak{P}(\zeta)\,P(z)\,\sigma^2}{3s^2\mathfrak{P}(z)\,P(\zeta)\,(z-\zeta)}$$

$$= \frac{1}{3i\pi}\sum_1^{n+1}\left[\frac{s}{z-k_\nu}\frac{\mathfrak{P}(k_\nu)}{f_\varrho(k_\nu)}\frac{\partial x_\varrho(\sigma,\zeta)}{\partial k_\nu} + \frac{\mathfrak{s}}{z-\mathfrak{k}_\nu}\frac{P(\mathfrak{k}_\nu)}{\mathfrak{f}_\varrho(\mathfrak{k}_\nu)}\frac{\partial \mathfrak{x}_\varrho(\sigma,\zeta)}{\partial \mathfrak{k}_\nu}\right]$$

gesetzt. Nun wollen wir noch

$$\frac{t(s\tau, z;\ \sigma, \zeta) - \tau t(s\tau^2, z;\ \sigma, \zeta)}{\tau - 1} = T(s, z;\ \sigma, \zeta),$$

$$\frac{-\tau t(s\tau, z;\ \sigma, \zeta) + t(s\tau^2, z;\ \sigma, \zeta)}{\tau - 1} = \mathfrak{T}(s, z;\ \sigma, \zeta),$$

also

$$t(s\tau, z;\ \sigma, \zeta) = \tau T(s, z;\ \sigma, \zeta) + \tau^2\mathfrak{T}(s, z;\ \sigma, \zeta),$$
$$t(s\tau^2, z;\ \sigma, \zeta) = \tau^2 T(s, z;\ \sigma, \zeta) + \tau\mathfrak{T}(s, z;\ \sigma, \zeta),$$

setzen. Dann sind die algebraischen Ausdrücke dieser Functionen

$$T(s, z;\ \sigma, \zeta) = \frac{1}{3i\pi}\sum_1^{n+1}\frac{s}{z-k_\nu}\frac{\mathfrak{P}(k_\nu)}{f_\varrho(k_\nu)}\frac{\partial x_\varrho(\sigma,\xi)}{\partial k_\nu} - \frac{\frac{1}{s} - \frac{1}{\sigma}}{3\mathfrak{s}(z-\zeta)},$$

$$\mathfrak{T}(s, z;\ \sigma, \zeta) = \frac{1}{3i\pi}\sum_1^{n+1}\frac{\mathfrak{s}}{z-\mathfrak{k}_\nu}\frac{P(\mathfrak{k}_\nu)}{\mathfrak{f}_\varrho(\mathfrak{k}_\nu)}\frac{\partial \mathfrak{x}_\varrho(\sigma,\zeta)}{\partial \mathfrak{k}_\nu} - \frac{\sigma - s}{3s(z-\zeta)},$$

so dass also in dem einen Ausdrucke nur die x im andern nur die $\mathfrak{x}$ vorkommen.

Darstellung von Integralen zweiter Gattung durch ϑ-Functionen.

§ 25. Ist $(v_\lambda, \mathfrak{v}_\lambda) = (u_\lambda(s, z) - \sum_1^p u_\lambda(s_\nu, z_\nu);\ u_\lambda(s, z - \sum_1^p u_\lambda(s_\nu, z_\nu))$, so ist $\partial \lg \vartheta(v_\lambda;\ \mathfrak{v}_\lambda) : \partial z$ in T' d. h. in der durch die Schnitte $a, b, \bar{a}, \bar{b}$ begrenzten Fläche T (I § 19) als Function von z_ν stetig und wird im Puncte s, z wie $1 : z - z_\nu$ unendlich gross. Zu beiden Seiten der Querschnitte a und $\bar{a}$ hat die Function dieselben Werthe auf dem positiven Ufer von b_μ aber, bez. $\bar{b}_\mu$ ist sie bez. um

$$\frac{2\partial u_\mu(s, z)}{\partial z} = \frac{2i\pi}{1-\tau^2}\left(\frac{f_\mu(z)}{s\mathfrak{P}} + \tau\frac{\mathfrak{f}_\mu(z)}{\mathfrak{s}P}\right),\quad \frac{2\partial \mathfrak{u}_\mu(s, z)}{\partial z} = \frac{2i\pi}{1-\tau^2}\left(\frac{\tau f_\mu(z)}{s\mathfrak{P}} + \frac{\mathfrak{f}_\mu(z)}{\mathfrak{s}P}\right)$$

grösser als auf dem negativen. Durch diese Eigenschaften, und zwar auch schon dann, wenn die Werthe der Periodicitätsmoduln bei b und $\bar{b}$ nicht gegeben sind, ist eine Function von s_ν, z_ν bis auf eine willkürliche additive Constante bestimmt. Setzt man für ν der Reihe nach $1, 2, \ldots p$, so findet man, dass

Digitized by Google

$$\frac{\partial \lg \vartheta(v_\lambda;\ \mathfrak{v}_\lambda)}{\partial z} = \sum_1^p t(s, z;\ s_\nu, z_\nu) + C$$

sein muss, wenn $t(s, z;\ s_\nu, z_\nu)$ die in I § 39 festgesetzte Bedeutung hat, und C nur noch von s, z ohne Index abhängen kann.

Betrachtet man T und $\mathfrak{T}$ als Functionen von s_ν, z_ν so sind die Periodicitätsmoduln

	bei b_μ	bei $\bar{b}_\mu$
von $T(s, z;\ s_\nu, z_\nu)$	$2i\pi\, \mathfrak{f}_\mu(z) : \mathfrak{S}P(1-\tau)$,	$2i\pi\, \mathfrak{f}_\mu(z) : \mathfrak{S}P(\tau-\tau^2)$,
von $\mathfrak{T}(s, z;\ s_\nu, z_\nu)$	$2i\pi f_\mu(z) : s\mathfrak{P}(1-\tau^2)$,	$2i\pi\tau f_\mu(z) : s\mathfrak{P}(1-\tau^2)$.

§ 26. Um die Constante C zu bestimmen, setzen wir

$$(v'_\lambda;\ \mathfrak{v}'_\lambda) = (u_\lambda(s, z) - u_\lambda(\sigma, \xi) - u_\lambda(\mathfrak{k}_n) - 2\sum_1^{n-1} u_\lambda(\mathfrak{k}_\nu);\quad \mathfrak{u}_\lambda(s, z) - \mathfrak{u}_\lambda(\sigma, \zeta) - \mathfrak{u}_\lambda(\mathfrak{k}_n) - 2\sum_1^{n-1} \mathfrak{u}_\lambda(\mathfrak{k}_\nu)),$$

und untersuchen zunächst den Quotienten

$$\frac{\vartheta(v'_\lambda - \frac{1}{2}(a_{\mu n} - \bar{a}_{\lambda n}) - \frac{1}{2}i\pi\ .\ )}{\vartheta(v'_\lambda;\ \mathfrak{v}'_\lambda)\ .\ e^{\frac{1}{2}(v'_n - \mathfrak{v}'_n)}} = \text{Const.}\frac{\vartheta(v'_\lambda + \frac{1}{2}(a_{\lambda n} - \bar{a}_{\lambda n}) + \frac{1}{2}i\pi;\ .\ )}{\vartheta(v'_\lambda;\ \mathfrak{v}'_\lambda)\ .\ e^{\frac{1}{2}(\mathfrak{v}_n - v_n)}},$$

der als Function von s, z beim Ueberschreiten des Querschnittes a_n den Factor $\tau\tau$ bei $\bar{a}_n$ den Factor τ erhält, an den übrigen a und $\bar{a}$ aber stetig ist, der ferner beim Ueberschreiten eines Querschnittes b_μ oder $\bar{b}_\mu$ jedesmal den Factor τ erhält, und also (I § 44) wie $[\mathfrak{k}_n, k_{n+1}]\ .\ [k_{n+1}, \mathfrak{k}_{n+1}] = [\mathfrak{k}_n, \mathfrak{k}_{n+1}]$ verzweigt ist. Demnach kann sich dieser Quotient von der Function

$$\sqrt[3]{\frac{z-\mathfrak{k}_n}{z-\mathfrak{k}_{n+1}}}\ .\ \frac{s^2+s\sigma+\sigma^2}{z-\zeta}\ .\ (z-\mathfrak{k}_{n+1})$$

nur durch einen von z unabhängigen Factor unterscheiden*). Setzt man nun $z = \zeta$ so wird mit Rücksicht auf II § 7

$$(v' - \tfrac{1}{2}(a_{\lambda n} - \bar{a}_{\lambda n}) - \tfrac{1}{2}i\pi;\ \mathfrak{v}'_\lambda - \tfrac{1}{2}(a_{\lambda n} - \bar{a}_{\lambda n}) - \tfrac{1}{2}i\pi) = (-u_\lambda(\mathfrak{k}_n) - 2\sum_1^{n-1} u_\lambda(\mathfrak{k}_\nu) + \frac{1}{p-1}K_\lambda - u_\lambda(\mathfrak{k}_n);\ .\ )$$
$$= (-\tfrac{1}{2}N_\lambda;\ -\tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda) = (0, 0),$$

und dies muss auch gleich

$$(u_\lambda(\sigma, \zeta) - \sum_1^n u_\lambda(\sigma\tau, \zeta^{(\nu)}) + u_\lambda(\sigma\tau^2, \zeta^{(\nu)});\quad \mathfrak{u}_\lambda(\sigma, \zeta) - \sum_1^n \mathfrak{u}_\lambda(\sigma\tau, \zeta^{(\nu)}) + \mathfrak{u}_\lambda(\sigma\tau^2, \zeta^{(\nu)}))$$

sein, wenn $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)}$ diejenigen Werthe von z sind, für welche $s^2+s\sigma+\sigma^2 = (s-\sigma\tau)(s-\sigma\tau^2) = (s^3-\sigma^3) : (z-\zeta)$ verschwindet. Die Werthe von ζ für welche diese Function verschwindet, sollen ebenso mit $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots z^{(n)}$ bezeichnet werden.

Hieraus folgt nun, dass, wenn wir im vorigen Paragraphen die Puncte $s_1, z_1;\ s_2, z_2;\ \ldots\ s_p, z_p$ auf die Puncte $s\tau, z^{(1)};\ s\tau^2, z^{(1)};\ s\tau, z^{(2)};\ s\tau^2, z^{(2)};\ \ldots\ s\tau, z^{(n)};\ s\tau^2, z^{(n)}$ fallen lassen, der logarithmische Differentialquotient der ϑ-Function verschwindet, und dass demnach

$$C = -\sum_1^n t(s, z;\ s\tau, z^{(\nu)}) + t(s, z;\ s\tau^2, z^{(\nu)})$$

ist. Dieser Ausdruck lässt sich jedoch noch wesentlich vereinfachen, nämlich von den Grössen $z^{(\nu)}$ befreien. Da $\tau+\tau^2 = -1$ ist, so hat man zunächst

$$-t(s, z;\ s\tau, z^{(\nu)}) - t(s, z;\ s\tau^2, z^{(\nu)})$$
$$= \frac{1}{i\pi}\sum_1^{n+1}(\nu')\ \frac{\frac{1}{2}s}{z-k_{\nu'}}\ \frac{\mathfrak{P}(k_{\nu'})}{f_\varrho(k_{\nu'})}\ \frac{\partial x_\varrho(s, z^{(\nu)})}{\partial k_{\nu'}} + \frac{\frac{1}{2}\mathfrak{s}}{z-\mathfrak{k}_{\nu'}}\ \frac{P(\mathfrak{k}_{\nu'})}{\mathfrak{f}_\varrho(\mathfrak{k}_{\nu'})}\ \frac{\partial \mathfrak{x}_\varrho(s, z^{(\nu)})}{\partial \mathfrak{k}_{\nu'}},$$

worin also der vom Integralzeichen freie Theil der Function t verschwunden ist.

*) Soweit dieser Factor von ζ abhängt ist er gleich $\sqrt{(\zeta-\mathfrak{k}_{n+1}) : (\zeta-\mathfrak{k}_n)\ .\ (\zeta-\mathfrak{k}_n)}$.

Digitized by Google

Nach dem Abel'schen Satze (R. pag. 138) ist nun weiter der Ausdruck $\Sigma_{(\nu)} \partial x_\varrho(s, z^{(\nu)}) : \partial k_{\nu'}$ eine rationale Function von s, wenn $\nu = 0, 1, \ldots n$ gesetzt wird. Da derselbe, wie man leicht sieht, nur da unendlich wird, wo s verschwindet, so ist er eine ganze Function von $\mathfrak{s}$, und zwar eine lineare, weil er nur in der ersten Ordnung unendlich wird, also kann man ihm die Form geben $A_{\varrho\nu'} + B_{\varrho\nu'}\mathfrak{s}$. Lässt man $z\,(= z^{(0)})$ auf $k_{\nu'}$ fallen, so fallen die $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots z^{(n)}$ auf die übrigen k und man findet $B_{\varrho\nu'}$ indem man den Grenzübergang ausführt

$$\lim_{z = k_{\nu'}} \sqrt{z - k_{\nu'}} \cdot (A_{\varrho\nu'} + B_{\varrho\nu'}\mathfrak{s}) = \lim_{z = k_{\nu'}} \sqrt{z - k_{\nu'}} \cdot \sum_0^n{}_{\nu} \partial x_\varrho(s, z^{(\nu)}) : \partial k_{\nu'}$$

der ergiebt

$$B_{\varrho\nu'} = -i\pi f_\varrho(k_{\nu'}) : \mathfrak{P}(k_{\nu'}).$$

Lässt man z $(z^{(0)})$ auf $\mathfrak{k}_\mu$ fallen, so fallen die $z^{(1)}, z^{(2)} \ldots$ auf die übrigen $\mathfrak{k}$ und man hat $A_{\varrho\nu'} = \sum_{1}^{n+1}{}_{(\nu)} \partial x_\varrho(\mathfrak{k}_\nu) : \partial k_{\nu'}$.

Mit diesen Resultaten findet man endlich

$$\begin{aligned} C' = {} & \frac{1}{i\pi} \sum_0^n{}_{(\nu)} \sum_1^{n+1}{}_{(\nu')} \left[\frac{\frac{1}{3}s}{z - z_\nu} \frac{\partial x_\varrho(s, z^{(\nu)})}{\partial k_{\nu'}} \frac{\mathfrak{P}(k_{\nu'})}{f_\varrho(k_{\nu'})} + \frac{\frac{1}{3}\mathfrak{s}}{z - \mathfrak{k}_{\nu'}} \frac{\partial \mathfrak{x}_\varrho(s, z^{(\nu)})}{\partial \mathfrak{k}_{\nu'}} \frac{P(\mathfrak{k}_{\nu'})}{\mathfrak{f}_\varrho(\mathfrak{k}_{\nu'})} \right] \\ & - \frac{1}{i\pi} \sum_1^{n+1}{}_{(\nu')} \left[\frac{\frac{1}{3}s}{z - k_{\nu'}} \frac{\partial x_\varrho(s, z)}{\partial k_{\nu'}} \frac{\mathfrak{P}(k_{\nu'})}{f_\varrho(k_{\nu'})} + \frac{\frac{1}{3}\mathfrak{s}}{z - \mathfrak{k}_{\nu'}} \frac{\partial \mathfrak{x}_\varrho(s, z^{(\nu)})}{\partial \mathfrak{k}_{\nu'}} \frac{P(\mathfrak{k}_{\nu'})}{\mathfrak{f}_\varrho(\mathfrak{k}_{\nu'})} \right] \\ = {} & \sum_1^{n+1}{}_{(\nu)} \sum_1^{n+1}{}_{(\nu')} \left[\frac{\frac{1}{3}s}{z - k_\nu} \frac{\partial x_\varrho(\mathfrak{k}_\nu)}{\partial k_{\nu'}} \frac{\mathfrak{P}(k_{\nu'})}{f_\varrho(k_{\nu'})} + \frac{\frac{1}{3}\mathfrak{s}}{z - \mathfrak{k}_{\nu'}} \frac{\partial \mathfrak{x}_\varrho(k_\nu)}{\partial \mathfrak{k}_{\nu'}} \frac{P(\mathfrak{k}_{\nu'})}{\mathfrak{f}_\varrho(\mathfrak{k}_{\nu'})} \right] \\ & - \frac{1}{3} \sum_1^{n+1}{}_{(\nu')} \left[\frac{1}{z - k_{\nu'}} + \frac{1}{z - \mathfrak{k}_{\nu'}} + \frac{s}{z - k_{\nu'}} \frac{\partial x_\varrho(s, z)}{i\pi \partial k_{\nu'}} \frac{\mathfrak{P}(k_{\nu'})}{f_\varrho(k_{\nu'})} + \frac{\mathfrak{s}}{z - \mathfrak{k}_{\nu'}} \frac{\partial \mathfrak{x}_\varrho(s, z)}{i\pi \partial \mathfrak{k}_{\nu'}} \frac{P(k_{\nu'})}{\mathfrak{f}_\varrho(k_{\nu'})} \right] \end{aligned}$$

also für C einen von $z^{(1)}, z^{(2)} \ldots z^{(n)}$ freien Ausdruck.

§ 27. Ist nun $\varkappa$ ein beliebiger Verzweigungspunct und

$$(v_\lambda(\varkappa);\ \mathfrak{v}_\lambda(\varkappa)) = \left(\frac{3}{p-1} K_\lambda - 2u_\lambda(\varkappa) - \sum_1^p u_\lambda(s_\nu, z_\nu);\ \frac{3}{p-1} \mathfrak{K}_\lambda - 2\mathfrak{u}_\lambda(\varkappa) - \sum_1^p \mathfrak{u}_\lambda(s_\nu, z_\nu) \right),$$

und multipliciren die Gleichung des § 25 mit $\mathfrak{s}P$ und setzen sodann k_μ für z, so erhalten wir (vergl. I § 40) die Gleichung

$$\begin{aligned} & \frac{i\pi}{1 - \tau^2} \sum_1^n \left[\tau \frac{\partial \lg \vartheta(v_\lambda(k_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(k_\mu))}{\partial v_\nu} + \frac{\partial \lg \vartheta(v_\lambda(k_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(k_\mu))}{\partial \mathfrak{v}_\nu} \right] \mathfrak{f}_\nu(k_\mu) \\ = {} & \frac{i\pi}{1 - \tau^2} \sum_1^n \frac{\partial \lg \vartheta(v_\lambda(k_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(k_\mu))}{\partial \mathfrak{x}_\nu} \mathfrak{f}_\nu(k_\mu) = \frac{R'(k_\mu)}{3i\pi f_\varrho(k_\mu)} \sum_1^p \frac{\partial x_\varrho(s_\nu, z_\nu)}{\partial k_\mu} + C_\varrho(k_\mu), \end{aligned}$$

wenn angenommen wird, dass bei diesen Grenzübergang $C\mathfrak{s}P$ in $C_\varrho(k_\mu)$ übergehe. Multiplicirt man aber die Gleichung des § 25 mit $s\mathfrak{P}$ und setzt $z = \mathfrak{k}_\mu$ so erhält man die ähnliche Gleichung

$$\begin{aligned} & \frac{i\pi}{1 - \tau^2} \sum_1^n \left[\frac{\partial \lg \vartheta(v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{k}_\mu))}{\partial v_\nu} + \tau \frac{\partial \lg \vartheta(v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{k}_\mu))}{\partial \mathfrak{v}_\nu} \right] f_\nu(\mathfrak{k}_\mu) \\ = {} & \frac{i\pi}{1 - \tau^2} \sum_1^n \frac{\partial \lg \vartheta(v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{k}_\mu))}{\partial x_\nu} f_\nu(\mathfrak{k}_\mu) = \frac{R'(\mathfrak{k}_\mu)}{3i\pi \mathfrak{f}_\varrho(\mathfrak{k}_\mu)} \sum_1^n \frac{\partial \mathfrak{x}_\varrho(s_\nu, z_\nu)}{\partial \mathfrak{k}_\mu} + C_\varrho(\mathfrak{k}_\mu). \end{aligned}$$

Hierin ist ϱ beliebig. Es ergeben sich aus diesen Gleichungen sofort wichtige Eigenschaften der Periodicitätsmoduln. Wenn nämlich der Punct s_ν, z_ν den Querschnitt $b_{\varrho'}$ oder $b_{\varrho'}$ überschreitet, so erhält man den Zuwachs des Integrales zweiter Gattung in zwei Formen, durch deren Vergleichung sich ergiebt

$$\frac{2i\pi\tau}{1 - \tau^2} \mathfrak{f}_{\varrho'}(k_\mu) = \frac{\partial x_{\varrho\varrho'}}{\partial k_\mu} \frac{R'(k_\mu)}{3i\pi f_\varrho(k_\mu)}, \quad \frac{2i\pi}{1 - \tau^2} \mathfrak{f}_{\varrho'}(k_\mu) = \frac{\partial x_{\varrho\varrho'}}{\partial k_\mu} \frac{R'(k_\mu)}{3i\pi f_\varrho(k_\mu)} = \frac{\partial x_{\varrho\varrho'}}{\partial k_\mu} \frac{\tau^2 R'(k_\mu)}{3i\pi f_\varrho(k_\mu)},$$

$$\frac{2i\pi}{1 - \tau^2} f_{\varrho'}(\mathfrak{k}_\mu) = \frac{\partial \mathfrak{x}_{\varrho\varrho'}}{\partial \mathfrak{k}_\mu} \frac{R'(\mathfrak{k}_\mu)}{3i\pi \mathfrak{f}_\varrho(\mathfrak{k}_\mu)}, \quad \frac{2i\pi\tau}{1 - \tau^2} f_{\varrho'}(\mathfrak{k}_\mu) = \frac{\partial \mathfrak{x}_{\varrho\varrho'}}{\partial \mathfrak{k}_\mu} \frac{R'(\mathfrak{k}_\mu)}{3i\pi \mathfrak{f}_\varrho(\mathfrak{k}_\mu)} = \frac{\partial \mathfrak{x}_{\varrho\varrho'}}{\partial \mathfrak{k}_\mu} \frac{\tau R'(\mathfrak{k}_\mu)}{3i\pi \mathfrak{f}_\varrho(\mathfrak{k}_\mu)},$$

Digitized by Google

woraus folgt

$$\frac{\partial x_{\varrho\varrho'}}{\partial k_\mu} = -\frac{6\pi\pi\tau}{1-\tau^2}\,\frac{\mathfrak{f}_{\varrho'}(k_\mu)\,f_\varrho(k_\mu)}{R'(k_\mu)}, \quad \frac{\partial \mathfrak{x}_{\varrho\varrho'}}{\partial \mathfrak{k}_\mu} = -\frac{6\pi\pi\tau}{1-\tau^2}\,\frac{\mathfrak{f}_\varrho(\mathfrak{k}_\mu)\,f_{\varrho'}(\mathfrak{k}_\mu)}{R'(\mathfrak{k}_\mu)}.$$

Nun fanden wir in I § 23 die Gleichung $\mathfrak{x}_{\varrho'\varrho} = x_{\varrho\varrho'}$, woraus sofort noch die beiden Gleichungen fliessen

$$\frac{\partial x_{\varrho\varrho'}}{\partial \mathfrak{k}_\mu} = -\frac{6\pi\pi\tau}{1-\tau^2}\,\frac{\mathfrak{f}_{\varrho'}(\mathfrak{k}_\mu)\,f_\varrho(\mathfrak{k}_\mu)}{R'(\mathfrak{k}_\mu)}, \quad \frac{\partial \mathfrak{x}_{\varrho\varrho'}}{\partial k_\mu} = -\frac{6\pi\pi\tau}{1-\tau^2}\,\frac{\mathfrak{f}_\varrho(k_\mu)\,f_{\varrho'}(k_\mu)}{R'(k_\mu)}.$$

§ 28. Nun müssen die Constanten $C_\varrho(k_\mu)$, $C_\varrho(\mathfrak{k}_\mu)$ bestimmt werden. Um die erste auszuwerthen lassen wir die Puncte $s_1, z_1;\ s_2, z_2;\ \ldots\ s_p, z_p$ paarweise auf die Puncte $k_1, k_2, \ldots k_{\mu-1}, k_{\mu+1} \ldots k_{n+1}$ fallen, wodurch $(v_\lambda(k_\mu);\ v_\lambda(k_\mu))$ mit Rücksicht auf I § 29*) und II § 7 in $(0;\ 0)$ übergeht, und also $\partial \lg \vartheta(v_\lambda;\ v_\lambda) : \partial v_\nu$ und $\partial \lg \vartheta(v_\lambda;\ v_\lambda) : \partial v_\nu$ verschwinden. Somit hat man

$$\frac{2}{3i\pi}\sum_1^{n+1}{}^{(\mu)}\,\frac{\partial x_\varrho(k_\nu)}{\partial k_\mu}\,\frac{R'(k_\mu)}{f_\varrho(k_\mu)} + C_\varrho(k_\mu) = 0, \quad C_\varrho(k_\mu) = -\frac{2}{3i\pi}\sum_1^{n}{}^{(\mu)}\,\frac{\partial x_\varrho(k_\nu)}{\partial k_\mu}\,\frac{R'(k_\mu)}{f_\varrho(k_\mu)}.$$

Beachtet man, dass für $\mu \gtrless \nu$

$$\frac{\partial x_\varrho(k_\nu)}{\partial k_\mu} = \frac{\partial x_\varrho(\mathfrak{k}_\nu)}{\partial k_\mu}, \quad \frac{\partial \mathfrak{x}_\varrho(k_\nu)}{\partial \mathfrak{k}_\mu} = \frac{\partial \mathfrak{x}_\varrho(\mathfrak{k}_\nu)}{\partial \mathfrak{k}_\mu}$$

ist, so schliesst man, dass $C_\varrho(k_\mu)$ der Null gleich angenommen werden kann, wenn in den Integralen

$$\frac{\partial x_\varrho(s_1, z_1)}{\partial k_\mu}, \quad \frac{\partial x_\varrho(s_2, z_2)}{\partial k_\mu}, \ldots \frac{\partial x_\varrho(s_p, z_p)}{\partial k_\mu}$$

für die untere Grenze bez. die Puncte

$$k_1, \mathfrak{k}_1,\ k_2, \mathfrak{k}_2, \ldots k_{\mu-1}, \mathfrak{k}_{\mu-1},\ k_{\mu+1}, \mathfrak{k}_{\mu+1}, \ldots k_{n+1}, \mathfrak{k}_{n+1}$$

genommen werden. Für $C_\varrho(\mathfrak{k}_\mu)$ findet sich in ähnlicher Weise

$$C_\varrho(\mathfrak{k}_\mu) = -\frac{2}{3i\pi}\sum_1^{n+1}{}^{(\mu)}\,\frac{\partial \mathfrak{x}_\varrho(\mathfrak{k}_\nu)}{\partial \mathfrak{k}_\mu}\,\frac{R'(\mathfrak{k}_\mu)}{\mathfrak{f}_\varrho(\mathfrak{k}_\mu)}.$$

§ 29. Wir stellen die Gleichungen der vorigen Paragraphen noch in den speciellen Fällen auf, in welchen $(\nu \leqq n)$ $s_\nu\tau$, z_ν für s_ν, z_ν und $s_\nu\tau^2$, z_ν für $s_{\nu+n}$, z_ν gesetzt wird. Dann haben wir:

$$\frac{i\pi}{1-\tau^2}\sum_1^{n}\frac{\partial \lg \vartheta(v_\lambda(k_\mu);\ v_\lambda(k_\mu))}{\partial \mathfrak{x}_\nu}\,\mathfrak{f}_\nu(k_\mu) = \frac{R'(k_\mu)}{3i\pi f_\varrho(k_\mu)}\cdot\sum_1^{n+1}{}^{(\mu)}\,\frac{\partial}{\partial k_\mu}\left[\int_{\mathfrak{k}_\nu}^{s_\nu\tau,\ z_\nu} dx_\varrho + \int_{\mathfrak{k}_\nu}^{s_\nu\tau^2,\ z_\nu} dx_\varrho\right]$$

$$= -\frac{R'(k_\mu)}{3i\pi f_\varrho(k_\mu)}\sum_1^{n+1}{}^{(\mu)}\,\frac{\partial}{\partial k_\mu}\int_{\mathfrak{k}_\nu}^{s_\nu,\ z_\nu} dx_\varrho$$

$$\frac{i\pi}{1-\tau^2}\sum_1^{n}\frac{\partial \lg \vartheta(v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu);\ v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu))}{\partial x_\nu}\,f_\nu(k_\mu) = -\frac{R'(\mathfrak{k}_\mu)}{3i\pi\,\mathfrak{f}_\varrho(\mathfrak{k}_\mu)}\sum_1^{n+1}{}^{(\mu)}\,\frac{\partial}{\partial \mathfrak{k}_\mu}\int_{k_\nu}^{s_\nu,\ z_\nu} d\mathfrak{x}_\varrho.$$

Hier bezieht sich das Zeichen (μ) oben an Σ nur auf die untere Grenze, während in der oberen der Term s_{n+1}, z_{n+1} nicht vorkommt.

§ 30. **Grenzwerthe eines Differentialquotienten eines Integrals zweiter Gattung.** Differenzirt man die Gleichung des § 25 nach z_ϱ so erhält man

$$\frac{\partial^2 \lg \vartheta(v_\lambda;\ v_\lambda)}{\partial z\,\partial z_\varrho} = i\pi\sum_1^{n}\left[\frac{\partial^2 \lg \vartheta}{\partial z\,\partial x_\nu}\,\frac{f_\nu(z_\varrho)}{s_\varrho\,\mathfrak{P}_\varrho} + \frac{\partial^2 \lg \vartheta}{\partial z\,\partial \mathfrak{x}_\nu}\,\frac{\mathfrak{f}_\nu(z_\varrho)}{\mathfrak{s}_\varrho\,P_\varrho}\right] = \frac{\partial t(s, z;\ s_\varrho, z_\varrho)}{\partial z_\varrho}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung einmal mit $\mathfrak{s}_\varrho P_\varrho$ und setzt $z_\varrho = k_\mu$, ein andermal mit $s_\varrho \mathfrak{P}_\varrho$ und setzt $z_\varrho = \mathfrak{k}_\mu$, so ergeben sich die Gleichungen

*) Die dort eingeführte Bezeichnung für Summen und Producte, in denen ein Term fehlt, ist auch hier und weiter angewandt.

Digitized by Google

$$i\pi \sum_1^n \frac{\partial^2 \lg \vartheta(v_\lambda;\, v_\lambda)}{\partial z\, \partial \mathfrak{x}_\nu} \mathfrak{f}_\nu(k_\mu) = \lim_{z_\varrho = k_\mu} \mathfrak{s}_\varrho P_\varrho \frac{\partial t(s, z;\, s_\varrho, z_\varrho)}{\partial z_\varrho},$$

$$i\pi \sum_1^n \frac{\partial^2 \lg \vartheta(v_\lambda;\, v_\lambda)}{\partial z\, \partial x_\nu} f_\nu(\mathfrak{k}_\mu) = \lim_{z_\varrho = \mathfrak{k}_\mu} \mathfrak{s}_\varrho \mathfrak{P}_\varrho \frac{\partial t(s, z;\, s_\varrho, z_\varrho)}{\partial z_\varrho}.$$

Differenzirt man aber die im § 27 aufgestellten Gleichungen nach z_ϱ, so erhält man bei beliebigem ϱ' (auch für $\varrho' = \varrho$) die Gleichungen

$$i\pi \sum_1^n \frac{\partial^2 \lg \vartheta(v_\lambda(k_\mu);\, v_\lambda(k_\mu))}{\partial \mathfrak{x}_\nu\, \partial z_\varrho} \mathfrak{f}_\nu(k_\mu) = \frac{R'(k_\mu)}{3i\pi f_{\varrho'}(k_\mu)} \cdot \frac{\partial^2 x_{\varrho'}(s_\varrho, z_\varrho)}{\partial k_\mu\, \partial z_\varrho},$$

$$i\pi \sum_1^n \frac{\partial^2 \lg \vartheta(v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu);\, v_\lambda(\mathfrak{k}_\mu))}{\partial x_\nu\, \partial z_\varrho} f_\nu(\mathfrak{k}_\mu) = \frac{R'(\mathfrak{k}_\mu)}{3i\pi \mathfrak{f}_{\varrho'}(k_\mu)} \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{x}_{\varrho'}(s_\varrho, z_\varrho)}{\partial \mathfrak{k}_\mu\, \partial z_\varrho}.$$

Lässt man hierin den Index ϱ fort, so gehen die linken Seiten dieser Gleichungen in die linken Seiten der unmittelbar vorher aufgestellten über, und man erhält daraus die Beziehungen

$$\lim_{z_\varrho = k_\mu} \mathfrak{s}_\varrho P_\varrho \frac{\partial t(s, z;\, s_\varrho, z_\varrho)}{\partial z_\varrho} = \frac{R'(k_\mu)}{3i\pi f_{\varrho'}(k_\mu)} \cdot \frac{\partial^2 x_{\varrho'}(s, z)}{\partial k_\mu\, \partial z},$$

$$\lim_{z_\varrho = \mathfrak{k}_\mu} \mathfrak{s}_\varrho \mathfrak{P}_\varrho \frac{\partial t(s, z;\, s_\varrho, z_\varrho)}{\partial z_\varrho} = \frac{R'(\mathfrak{k}_\mu)}{3i\pi \mathfrak{f}_{\varrho'}(\mathfrak{k}_\mu)} \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{x}_{\varrho'}(s, z)}{\partial \mathfrak{k}_\mu\, \partial z}.$$

Daraus ergeben sich noch in T und $\mathfrak{T}$ die Gleichungen

$$\lim_{z = k_\mu} \mathfrak{s} P \frac{\partial \mathfrak{T}(\sigma, \zeta;\, s, z)}{\partial z} = \frac{R'(k_\mu)}{3i\pi f_{\varrho'}(k_\mu)} \cdot \frac{\partial^2 x_{\varrho'}(\sigma, \zeta)}{\partial k_\mu\, \partial \zeta},$$

$$\lim_{z = \mathfrak{k}_\mu} s \mathfrak{P} \frac{\partial T(\sigma, \zeta;\, s, z)}{\partial z} = \frac{R'(\mathfrak{k}_\mu)}{3i\pi \mathfrak{f}_{\varrho'}(\mathfrak{k}_\mu)} \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{x}_{\varrho'}(\sigma, \zeta)}{\partial \mathfrak{k}_\mu\, \partial \zeta}.$$

§ 31. Um $\partial \lg \vartheta(v_\lambda;\, v_\lambda) : \partial v_\varrho$ und $\partial \lg \vartheta(v_\lambda;\, v_\lambda) : \partial \mathfrak{v}_\varrho$ algebraisch darzustellen, kann man zuerst

$$\frac{\partial \lg \vartheta(v_\lambda;\, v_\lambda)}{\partial x_\varrho} = \frac{1}{1-\tau^2}\left(\frac{\partial \lg \vartheta(v_\lambda;\, v_\lambda)}{\partial v_\varrho} + \tau \frac{\partial \lg \vartheta(v_\lambda;\, v_\lambda)}{\partial \mathfrak{v}_\varrho}\right)$$

und

$$\frac{\partial \lg \vartheta(v_\lambda;\, v_\lambda)}{\partial \mathfrak{x}_\varrho} = \frac{1}{1-\tau^2}\left(\tau \frac{\partial \lg \vartheta(v_\lambda;\, v_\lambda)}{\partial v_\varrho} + \frac{\partial \lg \vartheta(v_\lambda;\, v_\lambda)}{\partial \mathfrak{v}_\varrho}\right)$$

darstellen, und dann durch Elimination jene ersten Werthe finden. Es wird daher genügen sich mit den letzteren Ausdrücken zu beschäftigen. Dabei setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial x_\mu(s_\nu, z_\nu)}{\partial z_\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial z_\nu}, \quad \frac{\partial \mathfrak{x}_\mu(s_\nu, z_\nu)}{\partial z_\nu} = \frac{\partial \mathfrak{x}_\mu}{\partial z_\nu}$$

und wieder

$$(v_\lambda;\, \mathfrak{v}_\lambda) = (u_\lambda(s, z) - \sum_1^p u_\lambda(s_\nu, z_\nu);\quad u_\lambda(s, z) - \sum_1^p u_\lambda(s_\nu, z_\nu)).$$

Alsdann können wir die Gleichungen ansetzen

$$\frac{\partial \lg \vartheta(v_\lambda;\, v_\lambda)}{\partial x_\varrho} = \frac{\nabla_\varrho}{\nabla} + V_\varrho, \quad \frac{\partial \lg \vartheta(v_\lambda,\, v_\lambda)}{\partial \mathfrak{x}_\varrho} = \frac{\nabla_{\varrho+n}}{\nabla} + \mathfrak{V}_\varrho,$$

worin zur augenblicklichen Abkürzung unter ∇ die Determinante

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1}, & \frac{\partial x_1}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial z_p} \\ \frac{\partial x_2}{\partial z_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial z_p} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial z_1}, & \frac{\partial x_n}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial z_p} \\ \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial z_1}, & \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial z_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial z_1}, & \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial z_p} \end{vmatrix}$$

verstanden wird, und unter ∇_ϱ diejenige, die aus ∇ dadurch hervorgeht, dass man an die Stelle von $\partial x_\varrho : \partial z_1$, $\partial x_\varrho : \partial z_2$, ... $\partial x_\varrho : \partial z_p$ in ∇ bez. $-t(s_1, z_1;\ s, z)$, $-t(s_2, z_2;\ s, z)$, ... $-t(s_p, z_p;\ s, z)$ treten lässt, und unter $\nabla_{\varrho+n}$ diejenige, die man erhält, wenn man an die Stelle von $\partial \mathfrak{x}_\varrho : \partial z_1$, $\partial \mathfrak{x}_\varrho : \partial z_2$, ... $\partial \mathfrak{x}_\varrho : \partial z_p$ bez. die Terme $-t(s_1, z_1;\ s, z)$, $-t(s_2, z_2;\ s, z)$, ... $-t(s_p, z_p;\ s, z)$ treten lässt. Dann sind V_ϱ, $\mathfrak{V}_\varrho$ von s, z unabhängige Grössen. Beide Seiten unserer Gleichungen werden nämlich als Functionen von s, z unendlich gross erster Ordnung in p Puncten $s_1, z_1, \dots s_p, z_p$ deren Lage völlig willkürlich ist, und haben an allen Querschnitten a, $\overline{a}$, b, $\overline{b}$ den Periodicitätsmodul Null bis auf einen. Die beiden Seiten der ersten unsrer Gleichungen haben nämlich bei b_ϱ den Periodicitätsmodul $-2 : 1-\tau^2$, bei $\overline{b}_\varrho$ den Periodicitätsmodul $-2\tau : 1-\tau^2$ und die beiden Seiten der zweiten Gleichung haben bei $\overline{b}_\varrho$ den Periodicitätsmodul $-2 : 1-\tau^2$ und bei b_ϱ den Modul $-2\tau : 1-\tau^2$. Dadurch ist aber eine solche Function bis auf eine (von s, z unabhängige) additive Constante bestimmt. Denn die Differenz zweier solcher Functionen würde in T einwerthig sein und in nur p ***willkürlich*** gelegenen Puncten unendlich gross erster Ordnung werden, was nicht möglich ist (R. pag. 122). Damit ist die Richtigkeit der aufgestellten Gleichungen erwiesen.

§ 32. Nun setzen wir ($\nu \leqq n$), $s_\nu\tau$, z_ν für s_ν, z_ν, $s_\nu\tau^2$, z_ν für $s_{\nu+n}$, z_ν, s_0, $z_0 = s, z$ und

$$(v_\lambda;\ v_\lambda) = \left(\frac{3}{p-1}K_\lambda - \sum_0^{n+1} u_\lambda(s_\nu\tau,\ z_\nu) + u_\lambda(s_\nu\tau^2,\ z_\nu);\ \ \frac{3}{p-1}\mathfrak{K}_\lambda - \sum_0^{n+1} \mathfrak{u}_\lambda(s_\nu\tau,\ z_\nu) + \mathfrak{u}_\lambda(s_\nu\tau^2,\ z_\nu)\right).$$

Ferner ist

$$\frac{\partial x_\nu(s_{\nu'}\tau,\ z_{\nu'})}{\partial z_{\nu'}} = \tau^2\frac{\partial x_\nu(s_{\nu'},\ z_{\nu'})}{\partial z_{\nu'}} = \tau^2\frac{\partial x_\nu}{\partial z_{\nu'}},\quad \frac{\partial x_\nu(s_{\nu'}\tau^2,\ z_{\nu'})}{\partial z_{\nu'}} = \tau\frac{\partial x_\nu}{\partial z_{\nu'}},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{x}_\nu(s_{\nu'}\tau,\ z_{\nu'})}{\partial z_{\nu'}} = \tau\frac{\partial \mathfrak{x}_\nu(s_{\nu'},\ z_{\nu'})}{\partial z_{\nu'}} = \tau\frac{\partial x_\nu}{\partial z_{\nu'}},\quad \frac{\partial \mathfrak{x}_\nu(s_{\nu'}\tau^2,\ z_{\nu'})}{\partial z_{\nu'}} = \tau^2\frac{\partial \mathfrak{x}_\nu}{\partial z_{\nu'}}.$$

Der Coefficient von $-t(s_\nu\tau, z_\nu;\ s, z)$ in der Determinante des vorigen Paragraphen gewinnt durch Einsetzen dieser Werthe eine ganz ähnliche Gestalt, als gewisse in II § 5 behandelte Grössen. Es ist somit

$$\frac{\partial \lg\vartheta(v_\lambda;\ v_\lambda)}{\partial x_\varrho} = \sum_1^n\left[\frac{\tau}{\tau-1}t(s_\nu\tau, z_\nu;\ s, z) - \frac{1}{\tau-1}t(s_\nu\tau^2, z_\nu;\ s, z)\right]\frac{\delta\lg\left|\frac{\partial x_\lambda}{\partial z_{\lambda'}}\right|}{\delta\frac{\partial x_\varrho}{\partial z_\nu}} + V_\varrho$$

oder mit Rücksicht auf die im § 24 eingeführte Bezeichnung

$$\frac{\partial \lg\vartheta(v_\lambda;\ v_\lambda)}{\partial x_\varrho} = -\sum_1^n \mathfrak{T}(s_\nu,\ z_\nu;\ s, z)\frac{\delta\lg\left|\frac{\partial x_\lambda}{\partial z_{\lambda'}}\right|}{\delta\frac{\partial x_\varrho}{\partial z_\nu}} + V_\varrho,$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial \lg \vartheta(v_\lambda;\ v_\lambda)}{\partial \mathfrak{x}_\varrho} = -\sum_1^n T(s_\nu,\ z_\nu;\ s,\ z)\ \frac{\delta \lg \left| \frac{\partial \mathfrak{x}_\lambda}{\partial z_{\lambda'}} \right|}{\delta \frac{\partial \mathfrak{x}_\varrho}{\partial z_\nu}} + \mathfrak{V}_\varrho,$$

welche Gleichungen sich leicht mittels der im § 25 gefundenen Eigenschaften von T und $\mathfrak{T}$ verificiren lassen.

§ 33. Die Auswerthung der Functionen V_ϱ, $\mathfrak{V}_\varrho$ ist nicht ohne Complication, durch nochmalige Differentiation nach z aber erhalten wir vollständig fertige algebraische Darstellungen für zweite Differentialquotienten der ϑ-Functionen, die $2p$-fach periodische Functionen sind. Nämlich

$$\frac{\partial^2 \lg \vartheta(v_\lambda;\ v_\lambda)}{\partial x_\varrho\, \partial z} = -\sum_1^n \mathfrak{T}'(s_\nu,\ z_\nu;\ s,\ z)\ \frac{\delta \lg \left| \frac{\partial x_\lambda}{\partial z_{\lambda'}} \right|}{\delta \frac{\partial x_\varrho}{\partial z_\nu}},$$

$$\frac{\partial^2 \lg \vartheta(v_\lambda;\ v_\lambda)}{\partial \mathfrak{x}_\varrho\, \partial z} = -\sum_1^n T'(s_\nu,\ z_\nu;\ s,\ z)\ \frac{\delta \lg \left| \frac{\partial \mathfrak{x}_\lambda}{\partial z_{\lambda'}} \right|}{\delta \frac{\partial \mathfrak{x}_\varrho}{\partial z_\nu}}$$

worin T', $\mathfrak{T}'$ die nach z genommenen Ableitungen bedeuten.

Will man die Functionen der vorigen Paragraphen genau darstellen, so kann man in der Gleichung des § 25 für z der Reihe nach $z_1, z_2 \ldots z_p$ setzen, und hieraus die Differentialquotienten eliminiren.

Theta-Functionen mit constanten Argumenten.

§ 34. Multiplicirt man die erste der Gleichungen des § 33 mit δP und setzt $z = k_\mu$, so folgt mit Rücksicht auf § 30 wenn dort ϱ für ϱ' genommen wird

$$i\pi \sum_1^n \frac{\partial^2 \lg \vartheta(v_\lambda(k_\mu);\ v_\lambda(k_\mu))}{\partial x_\varrho\, \partial \mathfrak{x}_\nu}\, \mathfrak{f}_\nu(k_\mu) = -\frac{R'(k_\mu)}{3i\pi f_\varrho(k_\mu)} \cdot \sum_1^n \frac{\partial^2 x_\varrho}{\partial k_\mu\, \partial z_\nu}\ \frac{\delta \lg \left| \frac{\partial x_\lambda}{\partial z_{\lambda'}} \right|}{\delta \frac{\partial x_\varrho}{\partial z_\nu}}.$$

Nun ist nach § 27

$$\mathfrak{f}_\nu(k_\mu)\, f_\varrho(k_\mu) = -\frac{R'(k_\mu)\ (1-\tau^2)}{6\pi\pi\tau}\ \frac{\partial x_{\varrho\nu}}{\partial k_\mu},$$

und es kann daher die letzte Gleichung geschrieben werden:

$$\sum_1^n \frac{\partial^2 \lg \vartheta(v_\lambda(k_\mu);\ v_\lambda(k_\mu))}{\partial x_\varrho\, \partial \mathfrak{x}_\nu} \cdot \frac{\partial x_{\varrho\nu}}{\partial k_\mu} = -\frac{2\tau}{1-\tau^2} \sum_1^n \frac{\partial^2 x_\varrho}{\partial k_\mu\, \partial z_\nu}\ \frac{\delta \lg \left| \frac{\partial x_\lambda}{\partial z_{\lambda'}} \right|}{\delta \frac{\partial x_\varrho}{\partial z_\nu}}.$$

Setzt man hier der Reihe nach $\varrho = 1, 2, \ldots n$ und addirt die so entstehenden Gleichungen, so folgt weiter

$$\sum_1^n \sum_1^n \frac{\partial^2 \lg \vartheta(v_\lambda(k_\mu);\ v_\lambda(k_\mu))}{\partial x_\nu\, \partial \mathfrak{x}_{\nu'}}\ \frac{\partial x_{\nu\nu'}}{\partial k_\mu} = -\frac{2\tau}{1-\tau^2}\ \frac{\delta \lg \left| \frac{\partial x_\lambda}{\partial z_{\lambda'}} \right|}{\delta k_\mu}.$$

§ 35. Diese letzte Gleichung kann auch so geschrieben werden

$$\tfrac{1}{3} \sum_1^n \sum_1^n \frac{\partial^2 \lg \vartheta^{c_\lambda;\ c_\lambda}_{d_\lambda;\ b_\lambda}(v_\lambda(k_\lambda)+\frac{1}{2}N_\lambda;\ v_\lambda(k_\mu)+\frac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda)}{\partial x_\nu\, \partial \mathfrak{x}_{\nu'}}\ \frac{\partial x_{\nu\nu'}}{\partial k_\mu} = \frac{\tau}{1-\tau^2}\ \frac{\partial \lg \left| A_{\lambda\lambda'} \right|}{\partial k_\mu} + \frac{\tau}{1-\tau^2} \frac{\partial \lg}{\partial k_\mu} \sqrt[3]{\prod_1^n (z_\nu - k_\mu)},$$

Digitized by Google

wenn $c\,\mathfrak{c}$, $d\,\mathfrak{d}$ die in II § 7 besprochenen Zahlen sind, und wenn auf die Determinante der rechten Seite das Multiplicationstheorem angewandt wird, indem die x durch die w(I § 23) dargestellt gedacht werden.

Lässt man die $z_1\, z_2 \ldots z_n$ auf $k_1, k_2 \ldots k_{\mu-1}, k_{\mu+1} \ldots k_{n+1}$ fallen, so geht die ϑ-Function in $\vartheta_{d_\lambda;\,\mathfrak{d}_\lambda}^{c_\lambda;\,\mathfrak{c}_\lambda}(0,0)$ über, und da nach II § 14 die Charakteristik dieser Function gerade ist, so ist nach II § 3

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 \lg \vartheta_{d_\lambda;\,\mathfrak{d}_\lambda}^{c_\lambda;\,\mathfrak{c}_\lambda}(0,0)}{\partial x_\nu\, \partial x_{\nu'}} = \frac{\tau}{1-\tau^2}\frac{\delta \lg \vartheta_{d_\lambda;\,\mathfrak{d}_\lambda}^{c_\lambda;\,\mathfrak{c}_\lambda}(0;0)}{\delta r_{\nu\nu'}},$$

und also

$$\frac{\partial \lg \vartheta_{d_\lambda;\,\mathfrak{d}_\lambda}^{c_\lambda;\,\mathfrak{c}_\lambda}(0;0)}{\partial k_\mu} = \frac{\partial \lg |A|}{\partial k_\mu} + \frac{\partial \lg \sqrt[3]{P'(k_\mu}}{dk_\mu},$$

woraus durch Integration folgt

$$\vartheta_{d_\lambda;\,\mathfrak{d}_\lambda}^{c_\lambda;\,\mathfrak{c}_\lambda}(0;0) = \text{Const.}\,|A|\,.\,\sqrt[3]{\Delta(k_1, k_2, \ldots k_{n+1})}.$$

Hierin ist die Constante zunächst nur von k_μ unabhängig, da man aber für μ die Werthe $1, 2 \ldots n+1$ setzen kann, so erkennt man sogleich, dass sie von allen k unabhängig ist. Die Grösse Δ ist I § 2 definirt.

§ 36. Um die Constante zu bestimmen, lassen wir die Puncte $k_1, k_2 \ldots k_n$ unendlich nahe an $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2 \ldots \mathfrak{k}_n$ rücken. Dadurch geht die rechte Seite unserer Gleichung nach I § 31 über in

$$\text{Const.}\,\frac{(-1)^{n\cdot\frac{n-1}{2}}\,.\,(2i\pi)^n}{\Delta(k_1, k_2 \ldots k_n)}\,\frac{\sqrt[3]{\Delta(k_1, k_2 \ldots k_{n+1})}}{\sqrt[3]{P'(k_{n+1})\,(\mathfrak{P}'(\mathfrak{k}_{n+1}))^2}} = \text{Const.}\,\frac{(-1)^{n\cdot\frac{n-1}{2}}\,.\,(2i\pi)^n}{\sqrt[3]{\Delta^2(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2 \ldots \mathfrak{k}_{n+1})}}$$

woraus, wenn unter m eine ganze Zahl verstanden wird, fliesst

$$\vartheta_{d_\lambda;\,\mathfrak{d}_\lambda}^{c_\lambda;\,\mathfrak{c}_\lambda}(0;0) = \tau^m(-1)^{n\cdot\frac{n-1}{2}}\,.\,|A|\,\sqrt[3]{\Delta(k_1, k_2, \ldots k_{n+1})\,\Delta^2(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots \mathfrak{k}_{n+1})} : (2i\pi)^n.$$

Eine dritte Wurzel der Einheit muss nämlich noch unbestimmt bleiben, weil über den Werth von s insoweit noch nicht verfügt ist, als noch s für $z = \infty$ im ersten Blatte $1, \tau$ oder $\tau\tau$ sein kann. Ehe wir m bestimmen, ziehen wir den wichtigen Schluss, dass

$$c_1 = c_2 = c_3 \ldots = c_n = \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}_2 = \ldots = \mathfrak{c}_n = 0$$

sein muss. Denn im andern Falle würde für $k_1 = \mathfrak{k}_1$, $k_2 = \mathfrak{k}_2$, $\ldots$ $k_n = \mathfrak{k}_n$ die linke Seite unserer Gleichung verschwinden, während die rechte endlich bleibt.

§ 37. Um m zu bestimmen müssen wir über die Lage der k bestimmte Voraussetzungen machen. Wir nehmen $k_1, \mathfrak{k}_1, k_2, \mathfrak{k}_2 \ldots k_{n+1}, \mathfrak{k}_{n+1}$ reell, und der Grösse nach so wie sie hier stehen geordnet, also $k_1 < \mathfrak{k}_1 < k_2 < \mathfrak{k}_2 < \ldots < \mathfrak{k}_{n+1}$ an. Ferner soll s im unendlich fernen Punct des ersten Blattes den Werth Eins haben. Dann ist s auf der reellen Achse vor k_1 $(z < k_1)$ positiv reell, ebenso zwischen $\mathfrak{k}_1$ und k_2 zwischen $\mathfrak{k}_2$ und k_3 etc. Auf dem positiven Ufer der Durchsetzungslinien $k_1, \mathfrak{k}_1$; $k_2, \mathfrak{k}_2, \ldots$ aber hat s einen Werth, der das Produkt von τ in einen positiv reellen Werth ist, auf dem negativen das Produkt von τ^2 in denselben reellen Werth. Hieraus ergiebt sich sogleich, dass die Integrale

$$\int_{b_1}\frac{dz}{s\mathfrak{P}}, \int_{b_2}\frac{dz}{s\mathfrak{P}}, \ldots \int_{b_n}\frac{dz}{s\mathfrak{P}}, \int_{b_1}\frac{z\,dz}{s\mathfrak{P}}, \ldots \int_{b_n}\frac{z^{n-1}dz}{s\mathfrak{P}}$$

d. h. die Integrale $A_{11}, A_{12}, \ldots A_{1n}, A_{21} \ldots A_{nn}$ reelle mit

$$\tau - \tau^2 = 2i\sin\frac{2\pi}{3} = i\sqrt{3}$$

multiplicirte, mithin rein imaginäre Grössen sind. Da nun die Function $\vartheta_{d_\lambda;\,\mathfrak{d}_\lambda}^{0;\,0}(0;0)$ für Werthe von $k_1, k_2 \ldots k_n$ die bez. hinlänglich wenig von $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2 \ldots \mathfrak{k}_n$ verschieden sind beliebig nahe Eins ist, so muss für solche Werthe der k $m = 0$, $\tau^m = 1$ genommen werden. Wegen der Stetigkeit der ϑ-Functionen, und weil $|A|$ nicht verschwinden kann ohne dass Grössen $k, \mathfrak{k}$ auf einander fallen, findet dasselbe statt, d. h.

Digitized by Google

ist $\tau^m = 1$ und die dritte Wurzel positiv reell zu nehmen, wenn die k und $\mathfrak{k}$ nur die am Anfange dieses Paragraphen beschriebenen Lagen haben.

Man sieht leicht, dass bei derselben Lage der Verzweigungspuncte die Grössen $x_{\mu\mu'} : 1 - \tau^2$ und folglich die $a_{\mu\mu'}$ reelle sind. Denn es haben die Grössen $\partial x_\mu : \partial z = i\pi f_\mu(z) : s\mathfrak{P}$ zwischen $\mathfrak{k}_\mu$ und $k_{\mu+1}$ reelle Werthe, und das Integral über einen Schnitt a kann in einen Theil im oberen Blatte über das negative Ufer der reellen Achse zerlegt werden, und in einen Theil im zweiten Blatte, der sich von dem im oberen Blatte durch den Factor $-\tau\tau$ unterscheidet. Da nun das Integral $\int dx_\mu$ zwischen $k_{\mu+\nu}$ und $\mathfrak{k}_{\mu+\nu}$ erstreckt Null ist, so sind die Integrale über die beiden Theile des Schnittes a im oberen Blatte reelle Grössen, im zweiten Blatte dieselben reellen Grössen, multiplicirt mit $-\tau\tau$, und also ist das ganze Integral dividirt durch $1 - \tau\tau$, und ebenso $a_{\mu\mu'} = x_{\mu\mu'} + x_{\mu'\mu} : 1 - \tau\tau$, reell w. z. b. w.

§ 37. Die in den vorhergehenden Paragraphen 33, 34, 35, 36 ausgeführten Rechnungen würden sich auch so haben ausführen lassen, dass man von den $\mathfrak{k}$ statt von den k und von $\mathfrak{x}_{\nu\nu'}$ statt den Grössen $x_{\nu\nu'}$ und von $\mathfrak{s}P$ statt $s\mathfrak{P}$ und den $\mathfrak{A}_{\nu\nu'}$ statt von den $A_{\nu\nu'}$ ausgegangen wäre. Dies ist so einleuchtend, dass man bis auf eine Constantenbestimmung das Resultat sofort hin schreiben kann. Es ist nämlich offenbar

$$\vartheta^{0;\,0}_{d_\lambda;\,\mathfrak{d}_\lambda}(0;\,0) = \varepsilon \,.\, (-1)^{n\frac{n+1}{2}} \,|\, \mathfrak{A}_{\lambda\lambda'} \,|\, \sqrt[3]{\Delta^2(k_1, k_2, \ldots k_{n+1}) \,.\, \Delta(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots \mathfrak{k}_{n+1})} : (2i\pi)^n$$

und es ist ε eine sechste Wurzel der Einheit. Um diese zu bestimmen, beachten wir, dass $\mathfrak{s}$ für $z = \infty$ im dritten Blatte den Werth τ hat, und dass deshalb $\tau \,.\, \mathfrak{A}_{\nu\nu'}$ eine reelle Grösse ist. Mithin ist $\varepsilon = \tau^n$.

§ 38. Somit ergeben sich drei Darstellungen der Function $\vartheta^{0;\,0}_{d_\lambda;\,\mathfrak{d}_\lambda}(0;\,0)$ die wir hier mit Fortlassung der Charakteristik (welche Fortlassung sich aus den §§ 36 und 39 rechtfertigen wird) zusammenstellen. Es ist

$$\begin{aligned}
\vartheta(0;\,0) &= (-1)^{n\left(\frac{n-1}{2}\right)} \,|\, A \,|\, . \sqrt[3]{\Delta(k_1, k_2 \ldots k_{n+1})\, \Delta^2(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2 \ldots \mathfrak{k}_{n+1})} : (2i\pi)^n \\
&= (-1)^{n\left(\frac{n+1}{2}\right)} \,|\, \mathfrak{A} \,|\, . \sqrt[3]{\Delta^2(k_1, k_2 \ldots k_{n+1})\, \Delta(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2 \ldots \mathfrak{k}_{n+1})} : (2i\pi)^n \\
&= \sqrt[3]{(-\tau)^n \,|\, A \,|\, . \,|\, \mathfrak{A} \,|} : (2i\pi)^p \,.\, \sqrt[3]{\Delta(k_1, k_2 \ldots k_n)\, \Delta(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2 \ldots \mathfrak{k}_n)},
\end{aligned}$$

worin für reelle der Grösse nach geordnete Werthe der $k_1, \mathfrak{k}_1, k_2, \mathfrak{k}_2 \ldots k_{n+1}, \mathfrak{k}_{n+1}$ die Wurzeln so zu nehmen sind, dass die rechte Seite positiv reell wird. Hieraus zieht man noch die Gleichung*)

$$|\, A \,|\, . \sqrt[3]{\Delta(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2 \ldots \mathfrak{k}_{n+1})} = (-\tau^n) \,|\, \mathfrak{A} \,|\, . \sqrt[3]{\Delta(k_1, k_2 \ldots k_{n+1})} = |\, \mathfrak{A} \,|\, . \sqrt[3]{\Delta(k_1, k_2 \ldots k_{n+1})}.$$

§ 39. Um die d und $\mathfrak{d}$ zu bestimmen, nehmen wir die in II § 5 besprochene Transformation vor und haben

$$\vartheta^{0;\,0}_{d_\lambda;\,\mathfrak{d}_\lambda}(0;\,0)_{(a)} = \varepsilon \,.\, \vartheta^{d_\lambda;\,\mathfrak{d}_\lambda}_{0;\,0}(0;\,0)_{(b)} : \sqrt{\Delta(a)} = \varepsilon \,.\, \vartheta^{d_\lambda;\,\mathfrak{d}_\lambda}_{0;\,0}(0;\,0)_{(b)} : \sqrt{(-\tau)^n \,|\, x_{\lambda\lambda'} \,|\, . \,|\, \mathfrak{x}_{\lambda\lambda'} \,|}$$

oder

$$\vartheta^{0;\,0}_{d_\lambda;\,\mathfrak{d}_\lambda}(0;\,0)_{(a)} : \sqrt{|\, A \,|\, . \,|\, \mathfrak{A} \,|} = \eta \,.\, \vartheta^{d_\lambda;\,\mathfrak{d}_\lambda}_{0;\,0}(0;\,0)_{(b)} \,.\, \sqrt{|\, B \,|\, . \,|\, \mathfrak{B} \,|}$$

worin ε und η rein numerische Grössen sind. Hieraus fliesst, wenn ζ wieder eine rein numerische Grösse bedeutet

$$\vartheta^{d_\lambda;\,\mathfrak{d}_\lambda}_{0;\,0}(0,\,0) = \zeta \sqrt{|\, B \,|\, . \,|\, \mathfrak{B} \,|} \,\sqrt[3]{\Delta(k_1, k_2 \ldots k_{n+1})\, \Delta(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2 \ldots \mathfrak{k}_{n+1})}.$$

Führt man nun den in I § 35 besprochenen Grenzübergang aus, so verschwindet nach den dort gefundenen Resultaten die rechte Seite dieser Gleichung nicht. Die linke Seite würde aber verschwinden, wenn irgend ein d oder $\mathfrak{d}$ von Null verschieden wäre. Demnach ist

$$d_1 = d_2 \ldots = d_n = \mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}_2 \ldots = \mathfrak{d}_n = 0,$$

und die unten II § 7 gemachten Voraussetzungen sind gerechtfertigt.

*) Diese Gleichung steht nicht im Widerspruch mit der aus I § 31 für den Grenzfall sich ergebenden Beziehung, wenn beachtet wird, dass dort eine dritte Wurzel noch unbestimmt geblieben ist.

Digitized by Google

§ 40. Da sich die Grössen $c\,\mathfrak{c}$, $d\,\mathfrak{d}$ als der Null gleich ergeben haben, so können wir nun die Systeme K, $\mathfrak{K}$ die in I § 28 noch nicht vollständig bestimmt werden konnten, genau auswerthen. Weil also

$$(\tfrac{1}{2}N_\lambda;\ \tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_\lambda) = (\tfrac{1}{2}\sum_1^n a_{\lambda\nu}c_\nu + a_{\lambda\nu}\mathfrak{c}_\nu + \tfrac{1}{2}d_\lambda i\pi,\ \tfrac{1}{2}\sum_1^n \mathfrak{a}_{\lambda\nu}c_\nu + \mathfrak{a}_{\lambda\nu}\mathfrak{c}_\nu + \tfrac{1}{2}\mathfrak{d}_\lambda i\pi) = (0;\ 0)$$

ist, und I § 28

$$(L_\lambda;\ \mathfrak{L}_\lambda) = (\sum_1^n (a_{\lambda\nu} - \bar{a}_{\lambda\nu}) + (n+1-\lambda)i\pi;\quad \sum_1^n (\mathfrak{a}_{\lambda\nu} - \bar{\mathfrak{a}}_{\lambda\nu}) + (n+1-\lambda)i\pi)$$

gesetzt wurde, so ergiebt sich

$$(N_\lambda;\ \mathfrak{N}_\lambda) = (M_\lambda + L_\lambda;\ \mathfrak{M}_\lambda + \mathfrak{L}_\lambda) = (0;\ 0),\quad M_\lambda = -L_\lambda,\quad \mathfrak{M}_\lambda = -\mathfrak{L}_\lambda,$$

$$(K_\lambda;\ \mathfrak{K}_\lambda) = (\tfrac{1}{2}M_\lambda - \tfrac{1}{6}L_\lambda;\ \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_\lambda - \tfrac{1}{6}\mathfrak{L}_\lambda) = (-\tfrac{2}{3}L_\lambda;\ -\tfrac{2}{3}\mathfrak{L}_\lambda)$$

$$= (\tfrac{2}{3}\sum_1^n (a_{\lambda\nu} - a_{\lambda\nu}) - \tfrac{2}{3}(n+1-\lambda)i\pi;\ \tfrac{2}{3}\sum_1^n (\mathfrak{a}_{\lambda\nu} - \mathfrak{a}_{\lambda\nu}) - \tfrac{2}{3}(n+1-\lambda)i\pi).$$

Dividirt man diese Grössen durch $p-1$, so erhält man die Werthe der Functionen u und $\mathfrak{u}$ im Puncte $\mathfrak{k}_{n+1}$.

§ 40. Sind nun $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_{n+1}$ $n+1$ beliebige von einander verschiedene Verzweigungspuncte, und $\varkappa'_1, \varkappa'_2, \ldots \varkappa'_{n+1}$ die übrigen und ist

$$\left(\frac{3}{p-1}K_\lambda - 2\sum_1^{n+1} u_\lambda(\varkappa_\nu);\ \frac{3}{p-1}\mathfrak{K}_\lambda - 2\sum_1^{n+1}\mathfrak{u}_\lambda(\varkappa_\nu)\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{3}\sum_1^n h_\nu(a_{\lambda\nu} - \bar{a}_{\lambda\nu}) + \tfrac{1}{2}g_\lambda i\pi,\ \tfrac{1}{3}\sum_1^n h_\nu(\mathfrak{a}_{\lambda\nu} - \bar{\mathfrak{a}}_{\lambda\nu}) + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_\lambda i\pi\right)$$

auf welche Form die Summe immer gebracht werden kann, so ist in der II § 1 angeführten Bezeichnung

$$e^{\frac{1}{3}f(h,\,-h)}\vartheta\left(\frac{3}{p-1}K_\lambda - 2\sum_1^{n+1}u_\lambda(\varkappa_\nu);\ .\right) = e^{\psi i\pi}\sqrt{(-\tau)^n|A|.|\mathfrak{A}|:(2i\pi)^p}\,.\,\sqrt[3]{\Delta(\varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_{n+1})\Delta(\varkappa'_1, \varkappa'_2 \ldots \varkappa'_{n+1})},$$

worin ψ ein reeller Bruch mit dem Nenner 3 ist. Um die Grösse ψ zu bestimmen, nehmen wir an, man habe mittels Fortschaffung ganzer Systeme von Periodicitätsmoduln die h absolut genommen möglichst klein, also gleich 0, $+1$ oder -1 gemacht. Dann ist die linke Seite für Lagen der k und $\mathfrak{k}$ wie sie im § 37 festgesetzt wurden, positiv reell. Man wird daher die $\varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_n, \varkappa'_1, \varkappa'_2 \ldots \varkappa'_{n+1}$ so ordnen können, dass die dritte reelle Wurzel aus dem Produkte ihrer Discriminanten reell ist, und dann ist $\psi = 0$ zu nehmen. Hierdurch ist das Vorzeichen in allen Gleichungen der §§ 13, 17 des Theiles II, was noch zu bestimmen war, gefunden.

§ 42. Für den Fall $n = 1$ haben wir

$$\vartheta(0,\,0) = \sqrt{A\,.\,\mathfrak{A}:(2i\pi)^2}\,\sqrt[3]{k_2 - k_1\,.\,\mathfrak{k}_2 - \mathfrak{k}_1},\quad \vartheta\begin{pmatrix} i\pi & i\pi \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \sqrt{A\,\mathfrak{A}:(2i\pi)^2}\,\sqrt[3]{\mathfrak{k}_2 - k_1\,.\,k_2 - \mathfrak{k}_1} = \vartheta(\tfrac{1}{3}i\pi,\ \tfrac{1}{3}i\pi),$$

$$e^{\frac{1}{3}a}\vartheta(\tfrac{1}{3}(a-\bar{a});\ \tfrac{1}{3}(\mathfrak{a}-\bar{\mathfrak{a}})) = \sqrt{A\mathfrak{A}:(2i\pi)^2}\,\sqrt[3]{\mathfrak{k}_1 - k_1,\ \mathfrak{k}_2 - k_2},\quad \vartheta(\tfrac{1}{3}(a-\bar{a}) + \tfrac{1}{3}i\pi,\ \tfrac{1}{3}(\mathfrak{a}-\bar{\mathfrak{a}}) + \tfrac{1}{3}i\pi) = 0,$$

$$A\sqrt[3]{\mathfrak{k}_2 - \mathfrak{k}_1} = \mathfrak{A}\sqrt[3]{k_2 - k_1}.$$

§ 43. In ähnlicher Weise kann man auch noch die partiellen Differentialquotienten von ϑ-Functionen ausdrücken, in denen die Argumente in der Form

$$(v_\lambda;\ \mathfrak{v}_\lambda) = (-u_\lambda(\varkappa_n) - 2\sum_1^{n-1}u_\lambda(\varkappa_\nu);\ -\mathfrak{u}_\lambda(\varkappa_n) - 2\sum_1^{n-1}\mathfrak{u}_\lambda(\varkappa_\nu))$$

enthalten sind. Um abzukürzen setzen wir dabei

$$\vartheta(\varkappa_\mu) = e^{-\Omega_\mu + \frac{1}{3}(v_\mu - \mathfrak{v}_\mu)}\vartheta(v_\lambda(\varkappa_\mu);\ \mathfrak{v}_\lambda(\varkappa_\mu)),$$

$$(v(\varkappa_\mu);\ \mathfrak{v}(\varkappa_\mu)) = (u(\varkappa_\mu) - \sum_1^\rho u(s_\nu, z_\nu);\ \mathfrak{u}(\varkappa_\mu) - \sum_1^\rho \mathfrak{u}(s_\nu, z_\nu)),$$

und die Determinanten

$$\sum \pm \frac{\partial u_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial z_2}\cdots\frac{\partial u_n}{\partial z_n}\cdot\frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial z_{n+1}}\cdot\frac{\partial \mathfrak{u}_2}{\partial z_{n+2}}\cdots\frac{\partial \mathfrak{u}_n}{\partial z_p} = \|\,u\,\|,$$

Digitized by Google

$$\sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial z_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial z_n} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial z_{n+1}} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial z_{n+2}} \cdots \frac{\partial \xi_n}{\partial z_p} = \| x \| .$$

Dann erhalten wir aus II § 13 die Gleichung

$$\sum_1^n \frac{\partial}{\partial v_\nu} \frac{\vartheta(x_\mu)}{\vartheta(x_{\mu'})} \frac{\partial u_\nu}{\partial z_\varrho} + \frac{\partial}{\partial v_\nu} \frac{\vartheta(x_\mu)}{\vartheta(x_{\mu'})} \frac{\partial u_\nu}{\partial z_\varrho} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z_\varrho - x_{\mu'}} - \frac{1}{z_\varrho - x_\mu}\right) \sqrt[3]{\frac{R'(x_{\mu'})}{R'(x_\mu)}} \prod_1^p \frac{z_\nu - x_\mu}{z_\nu - x_{\mu'}},$$

in der für ϱ der Reihe nach $1, 2, \ldots p$ gesetzt werden kann. Aus den so erhaltenen Gleichungen fliesst durch Elimination

$$\frac{\partial}{\partial v_\varrho} \frac{\vartheta(x_\mu)}{\vartheta(x_{\mu'})} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{R'(x_{\mu'})}{R'(x_\mu)}} \prod_1^p \frac{z_\nu - x_\mu}{z_\nu - x_{\mu'}} \cdot \sum_1^p \left(\frac{1}{z_\nu - x_{\mu'}} - \frac{1}{z_\nu - x_\mu}\right) \frac{\delta \lg \| u \|}{\delta \frac{\partial u_\varrho}{\partial z_\nu}}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{R'(x_{\mu'})}{R'(x_\mu)}} \prod_1^p \frac{z_\nu - x_\mu}{z_\nu - x_{\mu'}} \cdot \sum_1^p \left(\frac{1}{z_\nu - x_{\mu'}} - \frac{1}{z_\nu - x_\mu}\right) \left(\frac{\delta \lg \| x \|}{\delta \frac{\partial x_\varrho}{\partial z_\nu}} - \tau \frac{\delta \lg \| x \|}{\delta \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial z_\nu}}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial v_\varrho} \frac{\vartheta(x_\mu)}{\vartheta(x_{\mu'})} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{R'(x_{\mu'})}{R'(x_\mu)}} \prod_1^p \frac{z_\nu - x_\mu}{z_\nu - x_{\mu'}} \cdot \sum_1^p \left(\frac{1}{z_\nu - x_{\mu'}} - \frac{1}{z_\nu - x_\mu}\right) \left(-\tau \frac{\delta \lg \| x \|}{\delta \frac{\partial x_\varrho}{\partial z_\nu}} + \frac{\delta \lg \| x \|}{\delta \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial z_\nu}}\right).$$

Setzen wir hier $s_\nu \tau, z_\nu$ für s_ν, z_ν $(\nu \leq n)$ und $s_\nu \tau^2, z_\nu$ für $s_{\nu+n}, z_{\nu+n}$, so nimmt die Determinante $\| x \|$ eine Form an, welche der von II § 5 ganz ähnlich ist, und man kann zu ihrer Reduction sich der dort aufgestellten Gleichungen bedienen, und erhält so die Formeln

$$\frac{\partial}{\partial v_\varrho} \frac{\vartheta(x_\mu)}{\vartheta(x_{\mu'})} = \frac{-\tau^2}{3i\pi} \sqrt[3]{\frac{R'(x_{\mu'})}{R'(x_\mu)}} \prod_1^n \left(\frac{z_\nu - x_\mu}{z_\nu - x_{\mu'}}\right)^2 \cdot \sum_1^n \left(\frac{1}{z_\nu - x_{\mu'}} - \frac{1}{z_\nu - x_\mu}\right) \left(s_\nu \mathfrak{P}_\nu \frac{\delta \lg |f_\lambda(z_{\lambda'})|}{\delta f_\varrho(z_\nu)} - \mathfrak{s}_\nu P_\nu \frac{\delta \lg |\mathfrak{f}_\lambda(z_{\lambda'})|}{\delta \mathfrak{f}_\varrho(z_\nu)}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial v_\varrho} \frac{\vartheta(x_\mu)}{\vartheta(x_{\mu'})} = \frac{1}{3i\pi} \sqrt[3]{\frac{R'(x_{\mu'})}{R'(x_\mu)}} \prod_1^n \left(\frac{z_\nu - x_\mu}{z_\nu - x_{\mu'}}\right)^2 \cdot \sum_1^n \left(\frac{1}{z_\nu - x_{\mu'}} - \frac{1}{z_\nu - x_\mu}\right) \left(s_\nu \mathfrak{P}_\nu \frac{\delta \lg |f_\lambda(z_{\lambda'})|}{\delta f_\varrho(z_\nu)} - \tau \mathfrak{s}_\nu P_\nu \frac{\delta \lg |\mathfrak{f}_\lambda(z_{\lambda'})|}{\delta \mathfrak{f}_\varrho(z_\nu)}\right),$$

aus denen sogleich die Sätze der §§ 22, 23 über das Verschwinden der partiellen Differentialquotienten noch einmal hergeleitet werden können. Hier aber lassen wir $z_1, z_2 \ldots z_n$ auf n Verzweigungspuncte $x_1, x_2 \ldots x_n$ fallen, die von $x_{\mu'}$ verschieden sind, aber x_μ enthalten. Ist $x_\mu = k_\mu$ oder $x_\mu = \mathfrak{k}_\mu$, so erhalten wir im ersten Falle, also für $x_\mu = k_\mu$

$$\frac{\partial \vartheta(k_\mu)}{\partial v_\varrho} = \vartheta(x_{\mu'}) \cdot \frac{\tau\tau}{3i\pi} \sqrt[3]{\frac{R'(x_{\mu'}) \mathfrak{P}(k_\mu)}{(k_\mu - x_{\mu'})^2}} \prod_1^{n(\mu)} \left(\frac{x_\nu - k_\mu}{x_\nu - x_{\mu'}}\right)^2 \cdot \frac{\delta \lg |f_\lambda(x_{\lambda'})|}{\delta f_\varrho(k_\mu)},$$

im zweiten Falle $(x_\mu = \mathfrak{k}_\mu)$

$$\frac{\partial \vartheta(\mathfrak{k}_\mu)}{\partial v_\varrho} = -\vartheta(x_{\mu'}) \cdot \frac{\tau\tau}{3i\pi} \sqrt[3]{\frac{R'(x_{\mu'}) P(\mathfrak{k}_\mu)}{(\mathfrak{k}_\mu - x_{\mu'})^2}} \prod_1^{n(\mu)} \left(\frac{x_\nu - \mathfrak{k}_\mu}{x_\nu - x_{\mu'}}\right)^2 \cdot \frac{\delta \lg |f_\lambda(x_{\lambda'})|}{\delta \mathfrak{f}_\varrho(\mathfrak{k}_\mu)},$$

und

$$\frac{\partial \vartheta(k_\mu)}{\partial v_\varrho} = -\tau \frac{\partial \vartheta(k_\mu)}{\partial v_\varrho}, \quad -\tau \frac{\partial \vartheta(\mathfrak{k}_\mu)}{\partial v_\varrho} = \frac{\partial \vartheta(\mathfrak{k}_\mu}{\partial v_\varrho}, \quad \frac{\partial \vartheta(k_\mu)}{\partial \xi_\varrho} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta(\mathfrak{k}_\mu)}{\partial x_\varrho} = 0.$$

Hierin kann man noch $\vartheta(x_{\mu'})$ nach II § 42 durch die k und $\mathfrak{k}$ ausdrücken. Endlich hat man noch nach I § 32 und in der dort angewandten Bezeichnung

$$\frac{\delta \lg |f_\lambda(x_{\mu'})|}{\delta f_\varrho(x_\mu)} = \sum_1^n \frac{(-1)^{\mu+\nu} A_{\varrho\nu} C_{n-\nu+1,\mu}}{\Delta(x_1, x_2 \ldots x_n)}, \quad \frac{\delta \lg |\mathfrak{f}_\lambda(x_{\lambda'})|}{\delta \mathfrak{f}_\varrho(x_\mu)} = \sum_1^n \frac{(-1)^{\mu+\nu} \mathfrak{A}_{\varrho\nu} C_{n-\nu+1,\mu}}{\Delta(x_1, x_2 \ldots x_n)}.$$

Digitized by Google

§ 44. Für den Fall $n = 1$ entspringt aus der Gleichung

$$\frac{\vartheta(u(k_2) - u(s_1, z_1) - u(s_2, z_2),\ \mathfrak{u}(k_2) - \mathfrak{u}(s_1, z_1) - \mathfrak{u}(s_2, z_2))}{\vartheta(u(\mathfrak{k}_2) - u(s_1, z_1) - u(s_2, z_2),\ \mathfrak{u}(\mathfrak{k}_2) - \mathfrak{u}(s_1, z_1) - \mathfrak{u}(s_2, z_2))} = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{k}_2 - k_1}{k_2 - k_1}\frac{\mathfrak{k}_2 - \mathfrak{k}_1}{k_2 - \mathfrak{k}_1}\frac{z_1 - k_2}{z_1 - \mathfrak{k}_1}\frac{z_2 - k_2}{z_2 - \mathfrak{k}_2}},$$

(in welcher für $z_1 = z_2 = \mathfrak{k}_1$ und für reelle der Grösse nach geordnete $k_1\ \mathfrak{k}_1$, $k_2\ \mathfrak{k}_2$ die dritte Wurzel reell zu nehmen ist,) wenn die allgemeine Methode des vorigen Paragraphen angewandt wird, das Resultat

$$\frac{\partial}{\partial v_1}\vartheta(u(k_2) - 2u(\mathfrak{k}_1),\ \mathfrak{u}(k_2) - 2\mathfrak{u}(\mathfrak{k}_1)) = \frac{\partial}{\partial v_1}\vartheta(\tfrac{1}{2}i\pi,\ \tfrac{1}{2}i\pi) = \vartheta(0, 0)\frac{\sqrt{AA}}{3i\pi}\sqrt[3]{\mathfrak{k}_2 - k_1 \,.\, \mathfrak{k}_2 - \mathfrak{k}_1 \,.\, k_2 - \mathfrak{k}_1},$$

worin die rechte Seite für reelle der Grösse nach geordnete $k\ \mathfrak{k}$ negativ reell zu nehmen ist.

§ 45. Die Grössen K, $\mathfrak{K}$ haben für den Fall $n = 1$ die Werthe

$$K = \tfrac{2}{3}(\overline{a} - a) - \tfrac{1}{3}i\pi = -a - \tfrac{1}{3}i\pi,\quad \mathfrak{K} = \tfrac{2}{3}(\overline{\mathfrak{a}} - \mathfrak{a}) - \tfrac{1}{3}i\pi = a - \tfrac{1}{3}i\pi$$

und somit geben die Tafeln die auf Seite 14 und 15 verzeichnet sind für diesen Fall die Werthe

$$u(k_1) = \tfrac{1}{3}(\overline{a} - a) - \tfrac{2}{3}i\pi = a - \tfrac{2}{3}i\pi = -\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{3}i\pi,\quad \mathfrak{u}(k_1) = \tfrac{1}{3}(\overline{\mathfrak{a}} - \mathfrak{a}) - \tfrac{2}{3}i\pi = -\mathfrak{a} - \tfrac{2}{3}i\pi = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{2}{3}i\pi,$$

$$u(\mathfrak{k}_1) = \tfrac{1}{3}(\overline{a} - a) - \tfrac{1}{3}i\pi = a - \tfrac{1}{3}i\pi = -\tfrac{1}{2}a - \tfrac{2}{3}i\pi,\quad \mathfrak{u}(\mathfrak{k}_1) = \tfrac{1}{3}(\overline{\mathfrak{a}} - \mathfrak{a}) - \tfrac{1}{3}i\pi = -\mathfrak{a} - \tfrac{1}{3}i\pi = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{3}i\pi,$$

$$u(k_2) = \tfrac{2}{3}(\overline{a} - a) - \tfrac{1}{3}i\pi = 2a - \tfrac{1}{3}i\pi = -a - \tfrac{1}{3}i\pi,\quad \mathfrak{u}(k_2) = \tfrac{2}{3}(\overline{\mathfrak{a}} - \mathfrak{a}) - \tfrac{1}{3}i\pi = -2\mathfrak{a} - \tfrac{1}{3}i\pi = a - \tfrac{1}{3}i\pi,$$

$$u(\mathfrak{k}_2) = \tfrac{2}{3}(\overline{a} - a) - \tfrac{2}{3}i\pi = 2a - \tfrac{2}{3}i\pi = -a - \tfrac{2}{3}i\pi,\quad \mathfrak{u}(\mathfrak{k}_2) = \tfrac{2}{3}(\overline{\mathfrak{a}} - \mathfrak{a}) - \tfrac{2}{3}i\pi = -2\mathfrak{a} - \tfrac{2}{3}i\pi = a - \tfrac{2}{3}i\pi.$$

Da nun $\vartheta(u(x), \mathfrak{u}(x)) = 0$ ist, so folgt für $x = k_1$ und $x = k_2$ aus II § 6

$$\vartheta(\tfrac{1}{3}i\pi, a)\,\vartheta(a, 3a) + \tau\vartheta(\tfrac{1}{3}a + \tfrac{2}{3}i\pi, a)\,\vartheta(\tfrac{1}{3}a, 3a) = 0,$$

$$\vartheta(\tfrac{2}{3}i\pi, a)\,\vartheta(2a, 3a) + \tau\tau\vartheta(\tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{3}i\pi, a)\,\vartheta(\tfrac{1}{3}a, 3a) = 0.$$

§ 46. Liegen die beiden Puncte, in denen für $n = 1$ die ϑ-Function verschwindet, über einander, so kann man, was man ähnlich auch im allgemeinen Falle vermöchte, die Argumente etwas vereinfachen, indem man von der Congruenz Anwendung macht

$$(u(s, z) - u(\sigma\tau, \zeta) - u(\sigma\tau^2, \zeta),\ \mathfrak{u}(s, z) - \mathfrak{u}(\sigma\tau, \zeta) - \mathfrak{u}(\sigma\tau^2, \zeta)) \equiv (u(s, z) + \mathfrak{u}(\sigma, \zeta);\ \mathfrak{u}(s, z) + \mathfrak{u}(\sigma, \zeta)).$$

Dadurch erhält man aus II. § 19 die Gleichung

$$\frac{\vartheta(u(s,z) + u(\sigma,\zeta) + \tfrac{1}{3}i\pi, \mathfrak{u}(s,z) + \mathfrak{u}(\sigma,\zeta) + \tfrac{1}{3}i\pi)}{\vartheta(u(s, z) + (\sigma, \zeta),\ \mathfrak{u}(s, z) + \mathfrak{u}(\sigma, \zeta))} = c\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{z - k_2}{z - \mathfrak{k}_2}\right)^2\left(\frac{\zeta - k_2}{\zeta - \mathfrak{k}_2}\right)^2}\left\{\frac{s\mathfrak{P}(\mathfrak{k}_2 - \zeta)}{(z - \zeta)(z - \mathfrak{k}_2)} + \frac{\sigma\mathfrak{P}(s)(\mathfrak{k}_2 - z)}{(\zeta - z)(\zeta - k_2)}\right\}$$

$$c = \pm 1 : \sqrt[3]{(k_2 - \mathfrak{k}_1)\,(k_2 - k_1)\,(\mathfrak{k}_2 - \mathfrak{k}_1)}.$$

Die dritte Wurzel und das Vorzeichen $\pm$ sind so zu wählen, dass für reelle der Grösse nach geordnete k, $\mathfrak{k}$ und für $z = k_1$, $\zeta = k_2$ der Ausdruck rechts positiv reell ist.

Digitized by Google

Corrigenda. Seite 6 Zeile 6 von unten lies „von den Nullpuncten“ statt „dem Nullpuncte“. Seite 7 in der letzten Zeile der grossen Determinante lies x_μ^n statt x_μ^{n+1}. Seite 16 Zeile 3 und 4 ist für die obere Grenze der zweiten Summe $n-1$ nicht $n+1$ zu setzen. Seite 27 Zeile 4 von oben lies (zweimal) „s_1“ statt $s_,$. In der letzten Zeile derselben Seite lies $\mathfrak{P}'$ statt P' und 9 statt 18. Seite 26 Zeile 2 von unten ist das Quadratwurzelzeichen hinter . auf den ganzen Rest der Zeile zu beziehen. Seite 28 Zeile 4 von oben lies „3“ statt 6. Seite 29 Zeile 11 von unten lies

$$\Sigma\Sigma a_{\gamma\gamma'}(m_\gamma m_{\gamma'} - m_\gamma \mathfrak{m}_{\gamma'} + \mathfrak{m}_\gamma \mathfrak{m}_{\gamma'}) + (a_{\gamma\gamma'} - a_{\gamma'\gamma})\mathfrak{m}_\gamma \mathfrak{m}_{\gamma'}.$$

Seite 29 Zeile 40 in der letzten Formel in der Exponentialfunction des Zählers und Nenners lies „$-\frac{1}{3}$“ statt „$\frac{2}{3}$“. Seite 30 Zeile 2 von oben lies $h_\nu a_{\mu\nu}$ statt $a_{\mu\nu}$. Seite 33 in der 6. Zeile nach der Determinante lies ϱte statt μte Verticalreihe.

Halle, Druck von E. Karras.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google